Δ : d'où vient le 4 ?

Nous avons vu que le discriminant Δ d'un polynôme du second degré se calcule avec la formule $\Delta = b^2 - 4ac$. Mais pourquoi, et d'où vient le 4 ?

Pour répondre à ces questions, nous allons partir d'un polynôme du second degré, et chercher à le mettre sous forme canonique :

Partons de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a > 0$) (seule x est l'inconnue, on considère a, b et c connus).

On peut mettre a en facteur, ce qui donne $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$.

Un produit donne 0 si l'un des facteurs est nul ; or ici on sait que $a \neq 0$, donc l'équation précédente donne comme seule possibilité $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Cherchons alors à mettre l'expression du membre de gauche sous forme canonique. Pour cela, nous allons considérer que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de identité remarquable $(x+p)^2$.

Si on développe $(x+p)^2$, on obtient $x^2 + 2px + p^2$.

Donc si on veut que $x^2 + \frac{b}{a}x$ corresponde à $x^2 + 2px$, il faut forcément que $p = \frac{b}{2a}$ (car dans ce cas, $2px = 2 \times \frac{b}{2a} \times x = \frac{b}{a}x$, ce qui est bien ce qu'on avait dans $x^2 + \frac{b}{a}x$).

On peut donc déduire de cette démarche que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (par développement de l'identité remarquable), donc, en réduisant, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

En passant $\frac{b^2}{4a^2}$ à gauche du signe égal, on arrive à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x$.

Remplaçons alors $x^2 + \frac{b}{a}x$ dans l'équation que nous avions obtenue au début :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ devient alors } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Mettons au même dénominateur les deux fractions qui sont à l'extérieur de la parenthèse, et nous arrivons à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0.$$

Cela revient à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$ ou encore, avec un changement de signe, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$.

L'intérêt de procéder à ce changement de signe est que nous pouvons maintenant assimiler l'expression du membre de gauche à l'identité remarquable $X^2 - M^2$ qui peut se factoriser en $(X - M)(X + M)$.

Il y a toutefois une condition pour faire cela : il faut que $b^2 - 4ac$ soit positif (sinon, l'équation reviendrait à $X^2 + M^2 = 0$, qui n'a pas de solutions...).

En supposant donc que $b^2 - 4ac > 0$, on peut alors poursuivre la résolution de l'équation. Voilà d'où vient $\Delta = b^2 - 4ac$!

Reprenons à l'étape $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$: avec l'identité remarquable $X^2 - M^2 = (X - M)(X + M)$, en prenant $X = x + \frac{b}{2a}$ et $M = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ (puisque $M^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$), nous obtenons alors

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0.$$

On peut alors en déduire que soit $x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, ou soit $x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ (règle du produit nul).

Sachant que $\sqrt{4a^2} = 2a$, on obtient

$$\text{soit } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ ou soit } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$