Correction du devoir maison n°2

Dans une entreprise, les coûts de fabrication de q objets sont donnés, en euros, par la fonction C définie par $C(q) = 0,1q^2 + 10q + 1500$, pour q appartenant à l'intervalle $[0; 500]$.

L'entreprise vend chaque objet fabriqué 87 €.

1. Quels sont les coûts fixes (c'est-à-dire les coûts lorsqu'aucun objet n'est fabriqué) ?

Réponse :

Si aucun objet n'est fabriqué, c'est que $q = 0$.
Dans ce cas, $C(0) = 0{,}1 \times 0^2 + 10 \times 0 + 1500 = 1500$. Les coûts fixes sont de 1500 €.

Déterminer q pour que les coûts de fabrication soient égaux à 3500 €.

Réponse :

On veut que $C(q) = 3500$, ce qui revient à $0{,}1q^2 + 10q + 1500 = 3500$.
En passant 3500 à gauche, on obtient $0{,}1q^2 + 10q - 2000 = 0$.
La (ou les) valeur(s) de q pour lesquelles les coûts de fabrication seront de 3500 € doivent donc vérifier cette équation.
Comme c'est une équation du second degré, on peut trouver ses solutions avec le discriminant Δ :
$\Delta = 10^2 - 4 \times 0{,}1 \times (-2000) = 900$ donc $q_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{900}}{2 \times 0{,}1} = -200$ et $q_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{900}}{2 \times 0{,}1} = 100$.
Comme q représente une quantité entre 0 et 500, la solution -200 ne peut pas être retenue. Seule la solution $q = 100$ est valable.
Les coûts de production sont 3500 € lorsqu'on produit 100 objets.

2. Exprimer la fonction recette totale R en fonction de q.

Réponse :

Chaque objet est vendu 87 €, donc la recette de q objets est $87q$ euros.

3. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est égal à la différence entre la recette réalisée et les coûts de fabrication. Exprimer la fonction bénéfice B en fonction de q.

Réponse :

On a $B = R - C$, et on sait que $R(q) = 87q$, et $C(q) = 0{,}1q^2 + 10q + 1500$, donc
$B(q) = 87q - (0{,}1q^2 + 10q + 1500) = 87q - 0{,}1q^2 - 10q - 1500 = -0{,}1q^2 + 77q - 1500$.

4. Calculer la quantité d'objets à produire et à vendre pour que cette entreprise réalise un bénéfice maximal.

Réponse :

On cherche q pour que B soit maximal.
Comme B est une fonction polynôme du second degré en q, on peut trouver son maximum en cherchant d'abord les antécédents de 0 par B.
Pour cela, on calcule le discriminant Δ :
$\Delta = 77^2 - 4 \times (-0{,}1) \times (-1500) = 5329$.
Les antécédents de 0 par B sont donc $q_1 = \dfrac{-77 - \sqrt{5329}}{2 \times (-0{,}1)} = 750$, et $q_2 = \dfrac{-77 + \sqrt{5329}}{2 \times (-0{,}1)} = 20$.
On peut maintenant trouver α, abscisse du sommet de la courbe de B, car on sait que $\alpha = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$: on a donc $\alpha = 385$, ce qui signifie que le bénéfice est maximum lorsque l'entreprise fabrique et vend 385 objets.

Donner ce bénéfice maximal en euros.

Réponse :

Pour 385 objets, le bénéfice est maximal et se monte à $-0{,}1 \times 385^2 + 77 \times 385 - 1500 = 13\,322{,}5$ €.