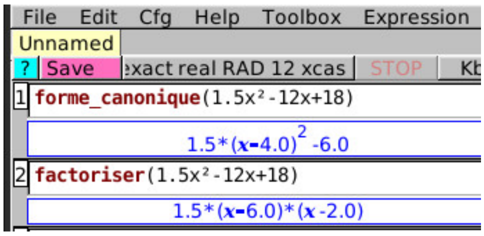
Correction du devoir maison n°4

▶ Exercice n°1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[3;10]$ par $f(x) = 1{,}5x^2 - 12x + 18$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :



1. Quelle forme utiliser pour déterminer le minimum de la fonction f sur $[3;10]$?

Réponse :

Le minimum peut être lu dans la forme canonique de f, qui est donnée par le logiciel formel : $f(x) = 1{,}5(x-4)^2 - 6$. D'après cette forme, le minimum de f est -6, et est obtenu lorsque $x = 4$.

2. Quelle forme utiliser pour déterminer l'image de 2 par f ?

Réponse :

On peut a priori utiliser n'importe quelle forme, remplacer x par 2 et faire le calcul. Mais la forme factorisée donnée par le logiciel, $1{,}5(x-6)(x-2)$, montre que 2 est un antécédent de 0 par f.

L'image de 2 par f est donc 0.

3. Quelle forme utiliser pour déterminer les points d'intersection de la courbe qui représente f avec les axes du repère ?

Réponse :

• La forme factorisée donne les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses : ce sont les points de coordonnées $(6;0)$ et $(2;0)$.

• La forme développée donne l'ordonnée à l'origine : c'est 18. Cela signifie que la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;18)$.

▶ Exercice n°2 – *Les Halles du Boulingrin*

On modélise la coupe transversale intérieure des Halles du Boulingrin, à Reims, par la fonction trinôme définie par $f(x) = -0{,}05(x-1)(x-39)$.

Le sol est représenté par l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = -0{,}05(x-20)^2 + 18{,}05$.

Réponse :

• Développons et réduisons $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}05(x-1)(x-39) = -0{,}05(x^2 - 39x - x + 39) \\ &= -0{,}05(x^2 - 40x + 39) = -0{,}05x^2 + 2x - 1{,}95. \end{aligned}$$

• D'autre part, développons et réduisons la forme canonique proposée :

$$\begin{aligned} -0{,}05(x-20)^2 + 18{,}05 &= -0{,}05(x^2 - 40x + 400) + 18{,}05 \\ &= -0{,}05x^2 + 2x - 20 + 18{,}05 = -0{,}05x^2 + 2x - 1{,}95. \end{aligned}$$

Nous avons obtenu le même résultat dans les deux développements, donc on peut en conclure que $f(x) = -0{,}05(x-1)(x-39) = -0{,}05(x-20)^2 + 18{,}05$.

2. En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :

a) la hauteur des halles ;

Réponse :

La hauteur des halles correspond au maximum de f, donc 18,05 m.

b) la largeur des halles.

Réponse :

La largeur des halles correspondant à l'écart entre les antécédents de 0.

D'après la forme factorisée, les deux antécédents de 0 sont 1 et 39, donc la largeur est halles est de 38 m (39-1 : écart entre 39 et 1).

3. L'un des points d'ancrage de la structure se trouve dans le sous-sol au point d'abscisse 0. À quelle profondeur se situe-t-il ?

Réponse :

D'après la forme développée, le point d'abscisse 0 a pour ordonnée -1,95 donc le point d'ancrage en question se trouve à 1,95 m sous le sol.