Correction du devoir en classe n°2

▶ Exercice n°1 *(3 points)*

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - x - 2 = 0$.

Réponse :

Résoudre cette équation revient à chercher les antécédents de 0 du polynôme du second degré $x^2 - x - 2$.

On peut donc utiliser le discriminant Δ : on a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$, qui est positif, donc il y a deux antécédents de 0 : $x_1 = \dfrac{1-3}{2 \times 1} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2 \times 1} = 2$.

Les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont donc $x = -1$ ou $x = 2$.

2. $x^2 + 21x + 72 = 6x + 18$.

Réponse :

En passant tous les termes dans le membre de gauche, on obtient $x^2 + 15x + 54 = 0$.

Comme dans la question précédente, on peut utiliser Δ : on a $\Delta = 15^2 - 4 \times 1 \times 54 = 9$, donc le polynôme $x^2 + 15x + 54$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{-15-3}{2} = -9$ et $x_2 = \dfrac{-15+3}{2} = -6$.

Ces deux nombres sont les deux solutions de l'équation $x^2 + 21x + 72 = 6x + 18$.

▶ Exercice n°2 *(5 points)*

On considère la fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = 6x^2 + x - 40$.

1. Déterminer les antécédents de 0 par f.

Réponse :

Calculons le discriminant Δ du polynôme du second degré $6x^2 + x - 40$: on a $\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-40) = 961$, donc le polynôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{961}}{2 \times 6} = -\dfrac{8}{3}$, et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{961}}{2 \times 6} = \dfrac{5}{2}$.

Ces deux nombres sont les antécédents de 0 par f.

Faire le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ (justifier les signes mis dans le tableau).

Réponse :

Le coefficient de x^2 est positif, donc la courbe de f est une parabole en $\cup$, ce qui donne comme tableau de signes :

x	$-\infty$		$-8/3$		$5/2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. En déduire l'abscisse du sommet de la courbe de f, ainsi que le maximum (ou le minimum) de f.

Réponse :

On sait que l'abscisse du sommet de la courbe se trouve au milieu entre les deux antécédents de 0, donc ici cette abscisse est $\dfrac{(-8/3) + (5/2)}{2} = -\dfrac{1}{12}$.

L'image de ce nombre par f est $f(-1/12) = 6 \times (-1/12)^2 + (-1/12) - 40 = -\dfrac{961}{24} \simeq -40{,}04$. C'est le minimum de f (car la courbe est en $\cup$).

Faire le tableau de variation de f.

Réponse :

Le tableau de variation de f est donc

x	$-\infty$		$-1/12$		$+\infty$
f		↘	$-961/24$	↗	

▶ Exercice n°3 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 9(x-2)^2 - 1$.

1. Faire le tableau de variation de f.

Réponse :

La forme donnée est la forme canonique de f, elle permet de faire immédiatement, sans aucuns calculs, le tableau de variation de f :

• Le coefficient $a = 9$ est positif, donc la courbe de f est en $\cup$.

• L'abscisse du sommet de f est 2, et le minimum de f est -1.

Le tableau de variation de f est donc

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. Développer et réduire f.

Réponse :

$f(x) = 9(x-2)^2 - 1 = 9(x-2)(x-2) - 1 = 9(x^2 - 2x - 2x + 4) - 1 = 9(x^2 - 4x + 4) - 1 = 9x^2 - 36x + 36 - 1 = 9x^2 - 36x + 35.$

Calculer les antécédents de 0 par f, puis faire le tableau de signe de f.

Réponse :

Calculons le discriminant Δ du polynôme $9x^2 - 36x + 35$: on a $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 9 \times 35 = 36$, donc le polynôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{36-6}{2 \times 9} = \dfrac{5}{3}$, et $x_2 = \dfrac{36+6}{2 \times 9} = \dfrac{7}{3}$.

Ces deux nombres sont les antécédents de 0 par f.

Le tableau de signe de f est donc :

x	$-\infty$		$5/3$		$7/3$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶ Exercice n°4 *(7 points)*

Une entreprise vend et fabrique des machines-outils pour l'industrie.

Du fait de ses contraintes de production, l'entreprise ne peut produire au maximum que 50 machines par mois.

On considère que chaque machine fabriquée est vendue, au prix fixe de 3500 € par machine.

Chaque mois, on modélise les coûts de production de q machines par la fonction $C(q) = 125q^2 - 5250q + 103125$ (le résultats de $C(q)$ est en euros).

1. Justifier que la recette R pour q machines vendues peut être calculée par la fonction $R(q) = 3500q$.

Réponse :

Chaque machine est vendue 3500 €, donc si on vend q machines on gagnera $3500 \times q$ euros de recette.

2. Montrer que, pour tout $q \in [0; 50]$, $B(q) = -125q^2 + 8750q - 103125$.

Réponse :

$B(q) = R(q) - C(q) = 3500q - (125q^2 - 5250q + 103125) = 3500q - 125q^2 + 5250q - 103125 = -125q^2 + 8750q - 103125.$

3. Déterminer pour quels nombres de machines produites l'entreprise est bénéficiaire.

Réponse :

L'entreprise est bénéficiaire si $B(q) > 0$. On peut donc, pour répondre à cette question, faire le tableau de signe de $B(q)$.
Le discriminant Δ du polynôme $-125q^2 + 8750q - 103125$ est $\Delta = 8750^2 - 4 \times (-125) \times (-103125) = 25\,000\,000$.
Les deux racines du polynômes sont $q_1 = \dfrac{-8750 - 5000}{2 \times (-125)} = 55$ et $q_2 = \dfrac{-8750 + 5000}{2 \times (-125)} = 15$.
Le coefficient de q^2 est négatif, donc la courbe de B est une parabole en $\cap$. Le tableau de signe de $B(q)$ est donc

q	$-\infty$		0		15		50		55		$+\infty$
$B(q)$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle où q prend ses valeurs, $[0; 50]$, le bénéfice est donc positif si q est entre 15 et 50 : l'entreprise doit vendre entre 15 et 50 machines pour réaliser un bénéfice positif.

4. Pour combien de machines le bénéfice sera-t-il maximal (montrer la démarche effectuée) ? Quel sera alors ce maximum du bénéfice ?

Réponse :

Comme le bénéfice est un polynôme du second degré, il est maximal lorsque la quantité q produite est au milieu entre q_1 et q_2.
Comme $\dfrac{q_1 + q_2}{2} = \dfrac{15 + 55}{2} = 35$, l'entreprise doit produire 35 machines pour obtenir le bénéfice maximal.
Le montant du bénéfice pour ces 35 machines est $-125 \times (35^2) + 8750 \times 35 - 103125 = 50\,000$ € : c'est le bénéfice maximal que l'entreprise peut obtenir.