Étude de fonctions, optimisation

▶ Exercice n°1

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 316x + 1$.

1. Calculer la dérivée de f. Étudier son signe, en déduire les variations de f.
Vérifier sur la calculatrice graphique.

2. Donner les coordonnées du sommet de la parabole représentant f.

▶ Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 15$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Vérifier en traçant la fonction f sur la calculatrice.

2. Calculer $f(3)$. En déduire le signe de la fonction f. Vérifier sur la calculatrice.

▶ Exercice n°3

Le bénéfice (en centaine d'euros) réalisé par une entreprise pour la production et la vente de x tonnes d'un produit chimique est donné par la fonction B d'expression $B(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}084x^2 + 4{,}68x - 10$, la quantité x étant comprise entre 0 et 28.

Déterminer le nombre de tonnes de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

▶ Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 5]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$, et dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[-2; 5]$.

▶ Exercice n°5

Un artisan fabrique des tables basses toutes identiques. Il ne peut en produire plus de 70 par an.

Les coûts de production (en euros) sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 70]$ par $C(x) = 0{,}1x^3 - 10{,}5x^2 + 910x + 2250$.

Chaque table est vendue 80 €.

On appelle **coûts fixes** les coûts obligatoires (électricité, matériaux, etc.) à acquitter, même si aucun objet n'est fabriqué.

1. Quels sont les coûts fixes pour l'artisan ?

2. On appelle B le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x tables.
Justifier que $B(x) = -0{,}1x^3 + 10{,}5x^2 - 830x - 2250$.

3. Étudier les variations de B sur l'intervalle $[0;70]$. En déduire :

a) le nombre de tables que l'artisan doit produire et vendre pour gagner de l'argent ;

b) le nombre de tables qu'il doit produire et vendre pour que son bénéfice soit maximal.

▶ Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x+1}$.

1. Montrer que l'expression de la dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.

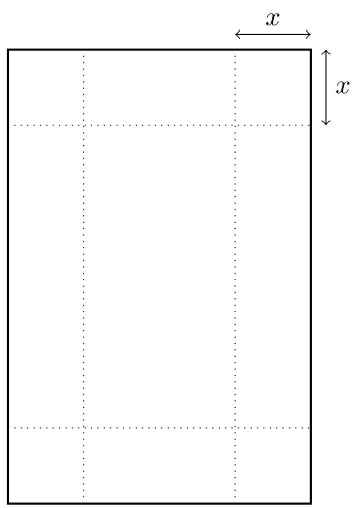
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;8]$. En déduire les variations de f sur cet intervalle.

3. Donner les extrema de f sur $[0;8]$.

▶ Exercice n°7

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur.

Pour cela, il enlève des carrés de côté x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève verticalement les parties rectangulaires restantes pour former les côtés de la boîte.



1. Pour quelle valeur de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

2. Peut-il construire une boîte dont la contenance est supérieure à 650 cm^3 ?