Dérivation et étude de fonctions – fiche n°3 – correction

► Exercice n°1

1. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 35$ sur l'intervalle $I = [-10; 10]$.

Pas de valeurs interdites car il n'y a pas de quotient.

$f'(x) = 6x^2 - 18x - 60$, pas de valeurs interdites. Signe de $f'(x)$: $\Delta = 1764$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$, $a = 6 > 0$ donc signe $+0-0+$.

f est croissante sur $[-10; -2]$, décroissante sur $[-2; 5]$, croissante sur $[5; 10]$.

Le minimum est $f(-10) = -2265$, le maximum $f(10) = 535$.

---

1. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ sur l'intervalle $I = [-4; 4]$.

3 est valeur interdite (car $x - 3 = 0$, et on ne peut pas diviser par 0).

$g = \dfrac{u}{v}$ donc $g'(x) = \dfrac{1(x-3) - 1(x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{x - 3 - x - 1}{(x-3)^2} = \dfrac{-4}{(x-3)^2}$.

Le numérateur de $g'(x)$ est toujours négatif (-4) et n'a pas d'antécédent de 0 (c'est une constante).

Le dénominateur est toujours positif mais s'annule pour $x = 3$, donc 3 valeur interdite pour $g'(x)$.

x	-4		3		4
-4		$-$		$-$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
g	$3/7$	$\searrow$	‖	$\searrow$	5

---

1. $q(x) = -2x^2 + 580x + 7940$ sur l'intervalle $[0; 250]$.

Pas de valeurs interdites (pas de division par 0 potentielle).

$q'(x) = -4x + 580$, pas de valeur interdite non plus.

$q'(x) = 0$ lorsque $x = 145$; $q'(x)$ est positif pour $x < 145$, négatif pour $x > 145$.

q est croissante sur $[0; 145]$, décroissante sur $[145; 250]$.

Le maximum est $q(145) = 49990$, le minimum $q(0) = 7940$.

---

1. $h(x) = x^4 - 2x^2$ sur l'intervalle $[-2; 2]$.

Pas de valeurs interdites.

$h'(x) = 4x^3 - 4x$. Pas de valeurs interdites.

Pour étudier le signe de $h'(x)$ (de degré 3), on ne peut pas utiliser Δ, mais on peut fatoriser x: $h'(x) = x(4x^2 - 4)$.

Pour le facteur commun x, l'antécédent de 0 est 0.

Pour la parenthèse $4x^2 - 4$, $\Delta = 0^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 64$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Signe $+0-0+$.

x	-2		-1		0		1		2
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2-4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
h	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

Le maximum est 8, atteint en -2 et en 2 ; le minimum est -1, atteint en 1 et en -1.

---

1. $p(x) = \dfrac{4}{x} + x + 10$ sur l'intervalle $[-4; 0[$.

Valeur interdite 0, à cause du dénominateur de $\dfrac{4}{x}$.

$p'(x) = \dfrac{-4}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ en mettant au même dénominateur. Valeur interdite 0 encore, à cause du x^2 du dénominateur.

Pour le numérateur de $p'(x)$, $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 16$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$. Signe $+0-0+$.

Pour le dénominateur, 0 est antécédent de 0, et le dén. est toujours positif.

x	-4		-2		0
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	0
$p'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
p	5	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\Vert$