BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC n°1
Session du mercredi 7 décembre 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE TS

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

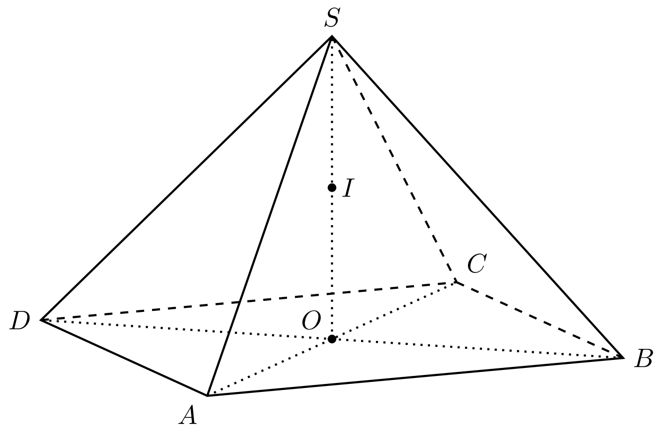
Le sujet est constitué de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

▶ Exercice n°1 *(sur 6 points)*

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A.

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre.



Le point O est le centre de la base $ABCD$, avec $OB = 1$ (unité non précisée).

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$. On appelle L le point d'intersection des droites (CI) et (AS).

Dans la suite de l'exercice, on pourra se placer dans le repère orthonormé$(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$, ou dans un autre repère choisi à votre convenance (expliciter alors le repère choisi).

Dans l'ordre que vous voulez, et par les méthodes de votre choix, montrer :

- que les points B, I et K sont alignés.
- que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

Partie B.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on donne les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(2; 1; -1)$, $E(-1; -2; 3)$ et $F(-2; -3, 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les points A, B, C et F sont coplanaires.

Affirmation 2 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Affirmation 3 : La droite (AC) est parallèle au plan (DEF).

► Exercice n°2 *(5 points)*

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant : dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

On utilisera le gramme comme unité pour les calculs.

1. a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) On peut également utiliser l'algorithme présenté dans le cadre ci-contre pour répondre au problème posé dans la question précédente.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	u prend la valeur ....
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1000$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice n°3 *(7 points)*

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A [3,75 points].

Soit λ (lambda, lettre grecque équivalente au ℓ latin) un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \end{cases}$.

1. Calcul de z_n en fonction de n et λ :

a) Montrer que $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\mathrm{i}$ et $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathrm{i}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

2. Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$:

a) Montrer que, dans ce cas, $z_4 = 0$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.

c) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie B [3,25 points].

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z, on associe le point z' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - z + 5$.

Les questions suivantes peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

1. Calculer l'affixe z' du point M' lorsque le point M a pour affixe $z = 1 - \mathrm{i}$.

2. Si le point M' a pour affixe $z' = 4$, quel est l'affixe z du point M ?

3. Soit A le point d'affixe 1.

Quelle(s) affixe(s) z du point M choisir pour que $OMAM'$ soit un parallélogramme ?

4. Pour le point M d'affixe z, on pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y nombres réels.

a) Exprimer la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartient à l'axe des abscisses.

▶ Exercice n°4 *(2 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3\mathrm{i}$, $z_B = 1 + \mathrm{i}$ et $z_C = -4\mathrm{i}$ sont-ils alignés ?

2. On considère la suite u définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 6n}$.

Déterminer la limite de la suite u quand n tend vers $+\infty$.