BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC n°2
Session du jeudi 6 avril 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE TS

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

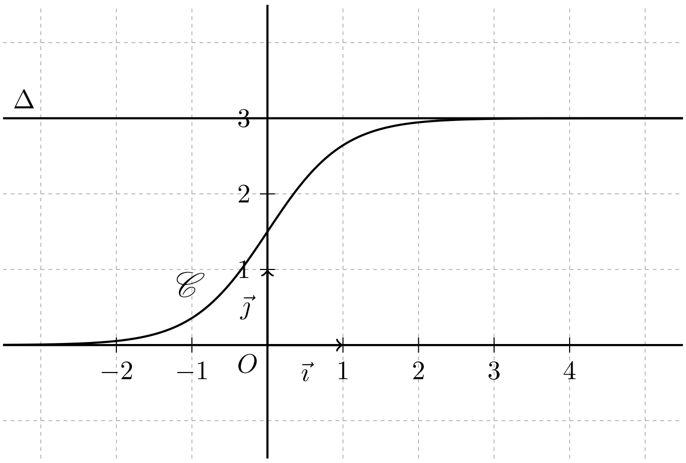
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est constitué de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Partie A.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$1 + e^{-2x} > 0$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times \dfrac{--2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \dfrac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} > 0$
Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 3$ donc le corollaire du TVI permet de conclure que f atteint une et une seule fois tout réel de l'intervalle $]0;3[$.
En particulier, l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Avec la calculatrice, on trouve $4 < \alpha < 4,01$.

Partie B.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

D'après la partie A, on peut affirmer que pour tout réel x, on a $f(x) < 3$; ainsi $0 < 3 - f(x)$; la fonction $h(x)$ est donc positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Dérivons la fonction H : $H'(x) = -1,5 \times \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
D'autre part, $h(x) = 3 - \dfrac{3}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3(1+e^{-2x})-3}{1+e^{-2x}} = H'(x)$.
La fonction H est donc bien l'une des primitives de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$ avec $a > 0$ et $3 > f(x)$ sur $[0;a]$ donc cette intégrale peut s'interpréter comme l'aire entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = 3$ entre les abscisses 0 et a.

b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -1,5\ln(1+e^{-2a}) - -1,5\ln 2 = 1,5(\ln 2 - \ln(1+e^{-2a})) = 1,5\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$$

c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

L'aire recherchée correspond à l'aire entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y=3$ entre les abscisses 0 et $+\infty$ c'est-à-dire à la limite en $+\infty$ de l'intégrale précédente.

Or, $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-2a} = 0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} 1,5\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right) = 1,5\ln 2 \simeq 1,04\,ua$

▶ Exercice n°2 *(4 points)*

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

On donne les points de l'espace $M(-1;2;3)$ et $N(1;-2;9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a/ $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b/** $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$ **c/** $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$ **d/** $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$

réponse b)

2. a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8;3;2)$.

b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.

c) La droite (D) est une droite du plan (P).

d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

réponse c)

3. a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

réponse a)

4. a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.

b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).

c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

réponse b)

▸ Exercice n°3 *(5 points – Candidats n'ayant pas suivi l'option de spécialité)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme ci-contre.

Variables :	n est un entier naturel non nul u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : | Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

On obtient environ 1,834.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

Cet algorithme permet de calculer u_n.

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Il semble que la suite (u_n) soit croissante et de limite 2.

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

Posons $\mathcal{P}(n)$: " $0 < u_n \leqslant 2$ ".

Initialisation : $(n = 0)$ $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$ donc la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier n fixé (c.à.d. $0 < u_n \leqslant 2$) et démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie (c.à.d $0 < u_{n+1} \leqslant 2$).

Par hypothèse de récurrence, on a $0 < u_n \leqslant 2$ d'où $0 < 2u_n \leqslant 4$

Donc $\sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4}$ car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante. D'où $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

Donc la propriété $\mathcal{P}$ est bien vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : D'après le théorème de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tous les entiers au-delà du rang d'initialisation, c'est-à-dire, pour tout entier $n \geqslant 0$, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

ainsi $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{2}$ et alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0$. Ainsi on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier n ; la suite u est donc croissante.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Or, elle est majorée par 2 ; le théorème de la limite monotone permet de conclure que la suite u est convergente vers une limite $l \leqslant 2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = 0,5\ln(2u_n) - \ln 2 = 0,5\ln 2 + 0,5\ln u_n - \ln 2 = 0,5\ln u_n - 0,5\ln 2 = 0,5(\ln u_n - \ln 2) = 0,5v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 0,5v_n$ est caractéristique d'une suite géométrique de raison 0,5. De plus $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Ainsi, pour tout entier n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -0,5^n \ln 2 = -\dfrac{\ln 2}{2^n}$

Or, $\ln u_n = v_n + \ln 2$ donc $u_n = e^{v_n + \ln 2} = e^{v_n}e^{\ln 2} = e^{v_n} \times 2$ ainsi $u_n = 2e^{-0,5^n \ln 2}$ (et on ne peut pas simplifier cette écriture !!)

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} u = 2$. (et on ne pouvait pas l'affirmer avant cette question !!)

d) Recopier l'algorithme ci-contre et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables :	n est un entier naturel non nul u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$ u prend la valeur $\sqrt{2u}$ n prend la valeur $n + 1$ Fin du tant que
Sortie :	Afficher n

▸ Exercice n°4 *(4 points)*

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « *compote allégée* ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

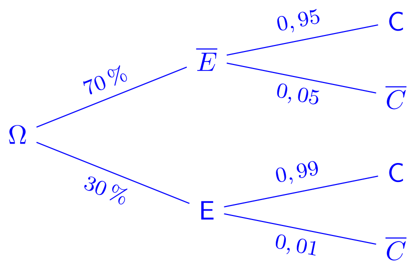
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :

E : « *Le petit pot provient de la chaîne F_2* » ;

C : « *Le petit pot est conforme* ».

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3}.

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.



2. Calculer la probabilité de l'événement « *Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1* ».

$P(C \cap \overline{E}) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(C) = 0,7 \times 0,95 = 0,665 = 66,5\%.$

3. Montrer que la probabilité de l'événement C est $P(C) = 0{,}962$.

$P(C) = P(C \cap \overline{E}) + P(C \cap E) = 0,665 + 0,3 \times 0,99 = 0,962 = 96,2\%.$

4. Déterminer la probabilité qu'un petit pot provienne de la chaîne F_2 sachant qu'il est conforme.

$$P_C(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,3 \times 0,99}{0,962} \simeq 0,309 \simeq 30,9\%.$$

5. Pour procéder à un test de qualité, on procède au tirage au hasard de 10 pots de compote dans toute la production. La quantité de pots produits est suffisamment importante pour que ce tirage soit assimilé à dix tirages indépendants sans remise.

a) Calculer la probabilité que, parmi les 10 pots pris au hasard, tous soient conformes.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pots conformes parmi les dix tirés au sort, alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,962)$, car il y a 10 tirages indépendants, et que la probabilité de succès (le pot est conforme) pour un essai est $0,962$.

On a alors $P(X = 10) = 0,962^{10} \simeq 0,679 \simeq 67,9\%$.

b) Calculer la probabilité que, parmi les 10 pots pris au hasard, moins de 9 *(donc 8 ou moins)* soient conformes.

$P(X \leqslant 8) \simeq 0,053 \simeq 5,3\%$. (la calculatrice donne accès à ce résultat directement).

6. Un pot conforme rapporte 0,10 € à l'entreprise, alors qu'un pot non conforme doit lui coûte 0,05 €.

Calculer le gain que peut espérer faire l'entreprise pour 10 000 pots produits.

Soit G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique pour un pot produit.

Sa loi de probabilité est :

k	$+0,10$€	$-0,05$€
$P(G = k)$	$\simeq 0,962$	$\simeq 0,038$

Pour un pot, l'espérance de gain moyen pour l'entreprise est $E(G) = 0,962 \times 0,10 + 0,038 \times (-0,05) = 0,0943$€.

Pour 10 000 pots, l'entreprise peut donc tabler sur un gain de 943€.

▶ Exercice n°5 *(3 points)*

Cet exercice est un exercice à prise d'initiative. Toute trace de recherche correcte, même inaboutie ou incomplète, sera évaluée positivement. N'hésitez donc pas à faire figurer vos idées et pistes de recherches.

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a$.

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On pose dans cette question $a = 1$.

Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

$I(1) = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x + 1)\,\mathrm{d}x = [e^x + x]_0^1 = (e+1) - (1+0) = e \simeq 2,7$

2. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?

Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

$I(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (ae^{ax} + a)\,\mathrm{d}x = [e^{ax} + ax]_0^1 = e^a + a - 1$

On cherche donc à savoir si la fonction $I : a \longmapsto e^a + a - 1$ peut atteindre la valeur 2. (on peut mettre des x si on aime pas les a) ;

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc continue) et on a $I'(x) = e^x + 1 > 0$ donc I est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $[0;1]$; de plus $I(0) = \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ et $I(1) = e > 2$.

On peut donc utiliser le corollaire du TVI pour affirmer qu'il existe une unique valeur de a tel que $I(a) = 2$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $0,79 < a < 0,8$.