EXERCICE 1 (6 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A

Dans le repère suggéré par l'énoncé, les coordonnées des points de la figure sont les suivants :
O$(0\,;0\,;0)$ B$(1\,;0\,;0)$ C$(0\,;1\,;0)$ S$(0\,;0\,;1)$ A$(0\,;-1\,;0)$ D$(-1\,;0\,;0)$.
On obtient aussi : I$(0\,;0\,;\frac{1}{2})$ K$(\frac{-1}{3}\,;0\,;\frac{2}{3})$.

Pour montrer que les points B, I et K sont alignés, on peut montrer, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BK}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ $\boxed{\text{Les points B, I et K sont donc alignés.}}$

Déterminons ensuite les coordonnées du point L, intersection de (CI) et (AS).

$\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}0\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $C(0\,;1\,;0)\in(CI)$
Donc une RP de (CI) est : $\begin{cases}x=0\\y=1-t\\z=\frac{1}{2}t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $C(0\,;0\,;1)\in(AS)$
Donc une RP de (AS) est : $\begin{cases}x=0\\y=t'\\z=1+t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$

Les coordonnées de L vérifient donc :
$\begin{cases}0=0\\1-t=t'\\\frac{1}{2}t=1+t'\end{cases}$ $\begin{cases}0=0\\t'=1-t\\\frac{1}{2}t=1+1-t\end{cases}$

D'où $t=\frac{4}{3}$ et $t'=-\frac{1}{3}$.
On remet dans l'une des deux RP et on a $\boxed{L(0\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}).}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et donc $\boxed{(AD)\ //\ (KL).}$

Partie B

Affirmation 1 : FAUX

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\end{pmatrix}$ A, B, C et F coplanaires $\iff$ il existe x et y tels que $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

$\begin{cases}-3=2x-2y\\-5=-2x-2y\\1=-2x-2y\end{cases}$ Ce système n'a pas de solution, donc les points $\boxed{\text{A, B C et F ne sont pas coplanaires.}}$

Affirmation 2 : FAUX

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Vérifions si elles sont sécantes :

(AB) : $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3-2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ (CD) : $\begin{cases}x=-1+3t'\\y=t'\\z=1-2t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$ On résout $\begin{cases}1+2t=-1+3t'\\2-2t=t'\\3-2t=1-2t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$

On obtient $t'=1$ et $t=\frac{1}{2}$ en additionnant les deux premières lignes.
En revanche, l'égalité de la troisième ligne n'est pas vérifiée. Cela signifie que les droites $\boxed{\text{(AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.}}$

Affirmation 3 : VRAI

(AC) : $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=3-2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-4\\-4\\5\end{pmatrix}$ donc (DEF) : $\begin{cases}x=2-3t'-4t''\\y=1-3t'-4t''\\z=-1+4t'+5t''\end{cases}\quad t'\text{ et }t''\in\mathbb{R}$

On va chercher à savoir si la droite (AC) et le plan (DEF) se coupent, pour cela on recherche la nature de l'intersection de ces deux objets.
Pour cela, on résout le système suivant :

$\begin{cases}1-2t=2-3t'-4t''\\2-2t=1-3t'-4t''\\3-2t=-1+4t'+5t''\end{cases}$ En soustrayant la deuxième ligne à la première on arrive à une égalité impossible.

La droite (AC) ne coupe donc pas le plan (DEF), ce qui signifie donc que $\boxed{(AC)\ //\ (DEF).}$

EXERCICE 2 (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1) a) Une augmentation de 20% se traduit par une multiplication par $1+\frac{20}{100}=1{,}2$ et chaque jour 100g de bactéries sont perdus. Au départ on a 1 kg de bactéries, soit 1 000 g.
On a bien : $\boxed{u_0 = 1\,000 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.}$

b) En utilisant un tableau de valeurs, on obtient : $u_{22} \simeq 28\,103 < 30\,000$ et $u_{23} \simeq 33\,624 > 30\,000$.
Il faut donc $\boxed{\text{23 jours}}$ pour que la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c)

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $\boxed{u \leqslant 30\,000}$ faire
	u prend la valeur $\boxed{1{,}2u - 100}$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher $\boxed{n}$

2) a) On considère la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n \geqslant 1\,000$
Initialisation : $u_0 = 1000 \geqslant 1\,000$.
Hérédité : Admettons $u_n \geqslant 1\,000$.
On a, successivement : $1{,}2u_n \geqslant 1\,200$ $1{,}2u_n - 100 \geqslant 1\,100 > 1\,000$ $u_{n+1} \geqslant 1000$.
Conclusion : d'après le théorème de récurrence, $\boxed{u_n \geqslant 1\,000}$ pour tout entier naturel n.

b) $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$.
or $u_n \geqslant 1\,000$ donc $0{,}2u_n - 100 \geqslant 0{,}2 \times 1\,000 - 100 \geqslant 100 > 0$.
On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui signifie donc que la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

3) a) $v_n = u_n - 500$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2u_n - 100 - 500 = 1{,}2u_n - 600 = 1{,}2(u_n - 500) = 1{,}2v_n$.
La suite $\boxed{(v_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = 1{,}2.}$

b) $v_0 = u_0 - 500 = 500$. $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\boxed{v_n = 500 \times 1{,}2^n.}$
$v_n = u_n - 500$ donc $u_n = 500 + v_n = \boxed{500 + 500 \times 1{,}2^n.}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$ puisque $1{,}2 > 1$. donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

EXERCICE 3 (7 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A

1) a) $z_1 = \lambda z_0 + \mathrm{i} = \boxed{\mathrm{i}}$ $z_2 = \lambda z_1 + \mathrm{i} = \lambda\mathrm{i} + \mathrm{i} = \boxed{(\lambda+1)\mathrm{i}}$ $z_3 = \lambda z_2 + \mathrm{i} = \lambda[(\lambda+1)\mathrm{i}] + \mathrm{i} = \boxed{(\lambda^2+\lambda+1)\mathrm{i}}$

b) On considère la propriété $\mathcal{P}_n$: $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$
Initialisation : $\dfrac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = 0 = z_0$.
Hérédité : Admettons que $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.
$$z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} = \lambda\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} + \mathrm{i} = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda}{\lambda - 1}\mathrm{i} + \frac{\mathrm{i}(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^{n+1}\mathrm{i} - \lambda\mathrm{i} + \lambda\mathrm{i} - \mathrm{i}}{\lambda - 1} = \frac{\mathrm{i}(\lambda^{n+1} - 1)}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$$
Conclusion : d'après le théorème de récurrence, $\boxed{z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}}$ pour tout entier naturel n.

2) a) $z_4 = \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \dfrac{1 - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \boxed{0}$

b) $z_{n+4} = \dfrac{\mathrm{i}^{n+4} - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^n \times \mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^n - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \boxed{z_n}$

c) Représentation graphique des 4 points.

Partie B

1) $z' = (1 - \mathrm{i})^2 - (1 - \mathrm{i}) + 5 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 - 1 + \mathrm{i} + 5 = \boxed{4 - \mathrm{i}}$

2) $z' = 4 \iff z^2 - z + 5 = 4 \iff z^2 - z + 1 = 0.$ $\qquad \Delta = -3 = (\mathrm{i}\sqrt{3})^2 \qquad z_1 = \boxed{\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$ et $z_2 = \boxed{\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$

3) $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} = z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{O}} = z \qquad z_{\overrightarrow{\mathrm{M'A}}} = z_{\mathrm{A}} - z' = 1 - (z^2 - z + 5) = -z^2 + z - 4.$
OMAM' est un parallélogramme $\iff z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{M'A}}} \iff z = -z^2 + z - 4 \iff z^2 + 4 = 0 \iff \boxed{z = -2\mathrm{i}}$ ou $\boxed{z = 2\mathrm{i}}$

4) a) $z' = (x + \mathrm{i}y)^2 - (x + \mathrm{i}y) + 5 = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 - x - \mathrm{i}y + 5 = [x^2 - x - y^2 + 5] + \mathrm{i}[2xy - y]$
La partie imaginaire de z' est $\boxed{\mathrm{Im}(z') = 2xy - y = y(2x - 1).}$

b) M' est sur l'axe des abscisses $\iff \mathrm{Im}(z') = 0 \iff y(2x - 1) = 0 \iff \boxed{y = 0}$ ou $\boxed{x = \dfrac{1}{2}.}$

M' est sur l'axe des abscisses ssi M est sur l'axe des abscisses ($y = 0$) ou si M est sur la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

<u>EXERCICE 4</u> (2 points) *Commun à tous les candidats*

1) $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} - \sqrt{2} - 3\mathrm{i} = 1 - \sqrt{2} - 2\mathrm{i}. \qquad z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}} = -4\mathrm{i} - \sqrt{2} - 3\mathrm{i} = -\sqrt{2} - 4\mathrm{i}.$
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires, les points $\boxed{\text{A, B et C ne sont donc pas alignés.}}$

2) $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 6n} = \dfrac{n^2(5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(2 + \frac{6}{n})} = \dfrac{5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{6}{n}}$ (si $n \neq 0$)

$\lim\limits_{n \to +\infty} (5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) = 5$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 + \frac{6}{n}) = 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \dfrac{5}{2}.}$