Calculs avec nombres complexes

Les nombres complexes s'écrivent sous la forme $a + \mathrm{i}b$, avec a et b nombres réels quelconques. La lettre i désigne le nombre dont le carré vaut -1.

Les nombres complexes suivent exactement les mêmes règles de calcul que les autres nombres, avec seulement cette règle supplémentaire : $\mathrm{i}^2 = -1$.

▶ Exercice n°1

Simplifier les calculs suivants, de façon à obtenir le résultat sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$:

a/ $z_1 = (2 + \mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i})$ **b/** $z_2 = 4(-2 + 3\mathrm{i}) + 3(-5 - 8\mathrm{i})$

c/ $z_3 = (2 - \mathrm{i})(3 + 8\mathrm{i})$ **d/** $z_4 = (2 + 3\mathrm{i})(4 - 6\mathrm{i})$

e/ $z_5 = (4 + i) + (5\mathrm{i} - 2)$ **f/** $z_6 = 3\mathrm{i} + \mathrm{i}(5 - 3\mathrm{i})$

g/ $z_7 = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{7}\mathrm{i}\right)$

▶ Exercice n°2

1. Donner le résultat des calculs suivants sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$, les nombres a et b étant réels :

a/ $(4 - 3\mathrm{i})(4 + 3\mathrm{i})$ **b/** $(5 - 2\mathrm{i})(5 + 2\mathrm{i})$

c/ $(-5\mathrm{i}) \times 5\mathrm{i}$ **d/** $7\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}$

e/ $8 \times 3\mathrm{i}$ **f/** **g/** $-4\mathrm{i} \times 6$

h/ $(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})$ **i/** $(\sqrt{2} + \mathrm{i})(\sqrt{2} - \mathrm{i})$

▶ Exercice n°3

1. Par quoi multiplier le complexe $6 - 5\mathrm{i}$ pour que le produit obtenu soit un nombre réel pur (donc sans partie complexe) ?

2. Même question avec $-1 + 2\mathrm{i}$.

3. De manière générale, par quel nombre complexe peut-on multiplier le nombre $a + \mathrm{i}b$, pour obtenir comme produit un nombre réel ? Justifier. Que peut-on affirmer à propos du nombre réel obtenu ?

▶ Exercice n°4

1. Comment utiliser les résultats de l'exercice précédent pour mettre sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$ le résultat de la fraction $\frac{1 + \mathrm{i}}{6 - 5\mathrm{i}}$?

2. Même question avec $\frac{5 - 3\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}}$.