Nombres complexes – forme trigonométrique, forme exponentielle

I. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan.

A) Module et argument d'un nombre complexe non-nul

Rappel : tout point M du plan possède des coordonnées polaires, notées $[r;\theta]$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u},\overrightarrow{OM})$ (l'angle θ n'est pas défini de manière unique, mais à un multiple de 2π près).

Soit z l'affixe d'un point M autre que l'origine. On appelle module de z, noté $\lvert z\rvert$, la distance OM. On a donc $\lvert z\rvert = r$. On appelle argument de z, noté $\arg z$, la mesure de l'angle θ. On a donc $\arg z = \theta$. L'argument d'un nombre complexe est donc défini à un multiple de 2π près.

Remarques :

Si $z = 0$, alors $|z| = 0$, mais on ne peut pas définir son argument, car l'angle $(\vec{u},\vec{0})$ n'existe pas.

$z = 0 \iff |z| = 0\,;$ $\qquad z \in \mathbb{R}^{+*} \iff \arg z = 0 + k\cdot 2\pi\ (k\in\mathbb{Z})\,;$ $\qquad z \in \mathbb{R}^{-*} \iff \arg z = \pi + k\cdot 2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

z est imaginaire pur $\iff \arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

$\boxed{\text{Soit } z \text{ un complexe, et } x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z), \text{ alors } |z| = \sqrt{x^2+y^2}.}$

On a aussi $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}, |z|^2 = z\cdot\overline{z}}$.

- Si x est un nombre réel, alors le module de x est égal à la valeur absolue de x.
- Deux nombres complexes non-nuls z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument
  si et seulement si $|z_2 - z_1| = 0$.

B) Forme trigonométrique

Rappel : soit M un point du plan et soient $[r;\theta]$ ses coordonnées polaires (M étant autre que O).

Soient $(x;y)$ les coordonnées cartésiennes de M, on a alors $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Notons z l'affixe de M, alors $z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}\cdot r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Soit z un nombre complexe non nul. Soit $r = \lvert z\rvert$, et $\theta = \arg z$. L'écriture $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appelée **forme trigonométri**

II. Écriture exponentielle d'un nombre complexe

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x$.

Pour tous réels a et b, on a alors $f(a)\times f(b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + \mathrm{i}(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$.

D'après les formules de duplication vues en classe de Première, on a donc $f(a)\times f(b) = f(a+b)$.

De plus, $f(0) = 1$.

Ces deux égalités sont vraies pour la fonction exponentielle : la fonction f se comporte donc de façon analogue à l'exponentielle, sauf que les images par f sont des complexes au lieu d'être des réels.

On convient donc de poser $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}, \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$. On a donc, pour tous réels θ_1 et θ_2, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.

A) Forme exponentielle d'un complexe

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ admet une écriture du type $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, appelée forme exponentielle de z.

On a donc $\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$.

B) Règles de calcul

Pour tous réels θ et θ', et pour tout entier naturel non-nul n,

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$, et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \theta$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$	$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$	