Fonctions logarithme

I/ Définition et propriétés algébriques.

Soit b un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de b, et on note $\ln b$, l'unique réel a tel que $\mathrm{e}^a = b$.

On a donc $\ln b = a \iff b = \mathrm{e}^a$.

Remarques : pour tout $b > 0$, $\mathrm{e}^{\ln b} = b$.

• La fonction ln est donc définie uniquement sur $]0;+\infty[$. Par contre $\ln a$ peut prendre toutes les valeurs réelles possibles (positives, négatives ou nulle).

• Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$. On dit que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

• $\ln 1 = 0$; $\ln \mathrm{e} = 1$.

• Il existe une fonction appelée logarithme décimal, et notée log.

Par définition, $\log x = y \iff y = 10^x$: les fonctions log et puissance de 10 sont donc réciproques l'une de l'autre.

II/ Propriétés algébriques.

On désigne par a et b deux réels strictement positifs, et par n un entiel relatif.

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	propriété fondamentale du ln	$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$		$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
$\ln(a^n) = n \ln a$		

III/ Dérivées de fonction en $\ln(u(x))$.

1. La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse, autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. La dérivée d'une fonction en $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$

Attention, la fonction u doit être strictement positive sur son ensemble de définition).

IV/ Tableau de variation de la fonction $\ln$.

:

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, car sa dérivée sur cet intervalle est $\frac{1}{x}$ qui est strictement positif.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	|| $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Conséquences : méthodes pour résoudre les équations ou inéquations comportant des logarithmes.

Soient a et b deux réels strictement positifs, alors

• $\ln a = \ln b \iff a = b$.

• $\ln a < \ln b \iff a < b$.

Dérivé de $\ln$ en 1 : par définition du nombre dérivé, la dérivée de la fonction ln en 1 est $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln h}{1+h-1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

Or le nombre dérivée de la fonction ln en 1 est $\frac{1}{1} = 1$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

V/ Comparaison de $\ln$ et des polynômes.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad\qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$$

On dit alors que, dans les formes indéterminées, les polynômes l'emportent sur ln : le résultat de la limite sera égal à la limite du polynôme.