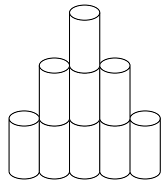
Correction du devoir maison n°1

▶ Exercice n°1

On empile des canettes de boisson de la façon montrée ci-contre. L'exemple montre un empilement de 3 rangées mais on peut, avec suffisamment de canettes, faire autant de rangées qu'on veut.



1. Si on réalise un empilement de n rangées, combien y aura-t-il de canettes au total ?

Réponse :

Soit u_n le nombre de canette sur la rangée n (en comptant les rangées à partir de 0). On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, etc. Puisqu'il y a deux canettes de plus sur un rang que sur le rang précédent, alors $u_{n+1} = u_n + 2$ donc la suite u est arithmétique de raison 2.

D'après la formule explicite d'une suite arithmétique, on a donc $u_n = 2n + 1$.

Sur n rangées, il y aura en tout $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ canettes, donc $\dfrac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}$ (d'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique).

On a $u_{n-1} = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$, donc $S = \dfrac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$.

2. Combien de canettes faut-il pour faire 25 rangées ?

Réponse :

Il faut $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2 \times 25 + 1)$ canettes, soit 625 canettes.

3. Avec 2015 canettes, quelle hauteur (en rangées) atteindra-t-on ? Restera-t-il des canettes inutilisées ou toutes seront-elles placées dans les rangées ?

Réponse :

Le plus grand carré contenu dans 2015 est $44^2 = 1936$ ($45^2 = 2025$ dépasse 2015).

Il y aura donc 44 rangées, et il restera $2015 - 1936 = 79$ canettes inutilisées.

▶ Exercice n°2

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de Noël d'un montant de 400 €, cette prime étant revalorisée de 6 € chaque année. On note p_0 la prime initiale, et p_n la prime au bout de n années ($n \geqslant 1$).

1. Calculer p_1, p_2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

Réponse :

$p_1 = 406$, $p_2 = 412$. On a $p_{n+1} = p_n + 6$.

2. Donner en justifiant l'expression de p_n en fonction de n.

Réponse :

La suite p est arithmétique de raison 6, donc $p_n = 400 + 6n$.

3. Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans ?

Réponse :

$p_{10} = 460$ €.

4. Au bout de 25 ans, quel est le montant total de toutes les primes perçues par un employé ?

Réponse :

Il faut calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{24} = \dfrac{25}{2}(400 + 550) = 11875$ €.

► Exercice n°3

Dans le cadre d'un traitement médical, on injecte 30 mL d'un traceur radioactif à un patient afin de pouvoir réaliser une imagerie médicale.

On sait que la concentration de ce traceur diminue de 8 % par heure.

Au bout de combien de temps la quantité de traceur dans le sang du patient sera-t-elle inférieure à 1 mL ?

Réponse :

Chaque heure, la concentration est multipliée par 0,92 (coefficient correspondant à une diminution de 8 %).

Au bout de n heures, la concentration sera donc $30 \times 0{,}92^n$.

On cherche à résoudre $30 \times 0{,}92^n < 1$, soit $0{,}92^n < \dfrac{1}{30} \simeq 0{,}033$.

En tâtonnant à la calculatrice, on trouve $n = 41$ (car $0{,}92^{41} \simeq 0{,}032$ alors que $0{,}92^{40} \simeq 0{,}035$, donc 40 n'est pas suffisant).

► Exercice n°4

Une piscicultrice voit chaque année la population de son élevage augmenter de 10 % de façon naturelle ainsi que de 200 poissons qu'elle ajoute.

On appelle P la suite numérique du nombre de poissons. Cette suite est-elle arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre ?

Réponse :

On a $P_{n+1} = 1{,}1P_n + 200$ (1,1 est le coefficient qui correspond à une augmentation de 10 %).
Cela ne correspond ni à la relation de récurrence d'une suite arithmétique, ni à celle d'une géométrique, donc P n'est ni l'une ni l'autre.