Correction du devoir maison n°2

▶ Exercice n°1

Soit u la suite défnie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 6$.

Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

1. À l'aide du tableur, calculer les 20 premiers termes de ces suites (faire une copie d'écran et la coller sur la copie, ou déposer le fichier dans le dossier échange du répertoire classe ; dans ce cas mettre le nom et le prénom dans le nom du fichier, par exemple « *Jean Dupont - TS1 - dm2.ods* »).

Les suites u et v semblent-elles être arithmétiques ? géométriques ?

Réponse :

I28

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	u(n)	v(n)		u(n+1)-u(n)	u(n+1)/u(n)		v(n+1)-v(n)	v(n+1)/v(n)
2	0	200	197						
3	1	594	591		394	2,97		394	3
4	2	1776	1773		1182	2,9898989899		1182	3
5	3	5322	5319		3546	2,9966216216		3546	3
6	4	15960	15957		10638	2,9988726043		10638	3
7	5	47874	47871		31914	2,9996240602		31914	3
8	6	143616	143613		95742	2,999874671		95742	3
9	7	430842	430839		287226	2,9999582219		287226	3
10	8	1292520	1292517		861678	2,9999860738		861678	3
11	9	3877554	3877551		2585034	2,9999953579		2585034	3
12	10	11632656	11632653		7755102	2,9999984526		7755102	3
13	11	34897962	34897959		23265306	2,9999994842		23265306	3
14	12	104693880	104693877		69795918	2,9999998281		69795918	3
15	13	314081634	314081631		209387754	2,9999999427		209387754	3
16	14	942244896	942244893		628163262	2,9999999809		628163262	3
17	15	2826734682	2826734679		1884489786	2,9999999936		1884489786	3
18	16	8480204040	8480204037		5653469358	2,9999999979		5653469358	3
19	17	25440612114	25440612111		16960408074	2,9999999993		16960408074	3
20	18	76321836336	76321836333		50881224222	2,9999999998		50881224222	3
21	19	228965509002	228965508999		152643672666	2,9999999999		152643672666	3
22									

En calculant $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$, on constate que u et v ne sont pas arithmétiques.

Calculer u_{n+1}/u_n montre que u n'est pas géométrique, par contre v semble l'être, de raison 3.

2. Démontrer la nature de la suite v. En déduire son expression explicite en fonction de n.

Réponse :

Admettons que pour tout entier $n \geqslant 0$, v_n est différent de 0.

On a alors, pour tout $n \geqslant 0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \dfrac{3u_n - 9}{u_n - 3} = \dfrac{3(u_n - 3)}{u_n - 3}$ donc v est bien géométrique de raison 3.

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n = v_0 \times 3^n = 197 \times 3^n$.

3. Donner l'expression explicite de u_n en fonction de n. La suite u converge-t-elle ?

Réponse :

On a, pour tout rang $n \geqslant 0$, $u_n = v_n + 3$, donc $u_n = 3 + 197 \times 3^n$.

Plus n va être grand, plus 3^n va être grand. Or u_n est plus grand que 3^n, donc plus n est grand plus u_n est grand : on en déduit que la limite de u est $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

► Exercice n°2 *(Pour aller plus loin – exercice facultatif)*

Même travail que l'exercice précédent, avec la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$, et la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Réponse :

Le tableur permet de conjecturer que v est arithmétique de raison 0,25.

On a, pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{4u_n - 4}{u_n + 3}} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n + 3}{4(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1}$.

On en déduit donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \dfrac{1}{4}$, donc v est bien géométrique de raison 0,25.

On a alors $v_n = v_0 + 0{,}25n = 1 + 0{,}25n$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

Comme $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$, alors $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$, donc $u_n = \dfrac{1}{1 + 0{,}25n} + 1$.

Plus n sera grand, plus $1 + 0{,}25n$ sera grand (bien que plus petit que n), mais son inverse $\dfrac{1}{0{,}25n + 1}$ sera de plus en plus proche de 0 au fur et à mesure que n augmente.

On en déduit que plus n augmente, plus u_n se rapproche de 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.