# Correction du devoir maison n°3

## ▶ Exercice n°1

On considère la fonction $f$ définie pour tout nombre complexe $z$ différent de i par $f(z) = \dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x$ et $y$ nombres réels.

**1.** Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. On fera clairement apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

**Réponse** :

$$f(z) = \frac{x+\mathrm{i}y-2}{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}y-2}{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}} \times \frac{x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}} = \frac{x^2-\mathrm{i}xy+\mathrm{i}x+\mathrm{i}xy-\mathrm{i}^2y^2+\mathrm{i}^2y-2x+2\mathrm{i}y-2\mathrm{i}}{x^2-\mathrm{i}xy+\mathrm{i}x+\mathrm{i}xy-\mathrm{i}^2y^2+\mathrm{i}^2y-\mathrm{i}x+\mathrm{i}^2y-\mathrm{i}^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x-y+\mathrm{i}(x+2y-2)}{x^2+y^2-2y+1}.$$

On a donc $\mathrm{Re}(f(z)) = \dfrac{x^2+y^2-2x-y}{x^2+y^2-2y+1}$ et $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{x+2y-2}{x^2+y^2-2y+1}$.

**2.** En détaillant les étapes, déterminer et construire dans un repère orthonormé l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x;y)$ tels que :

**a)** $f(z)$ soit un réel ;

**Réponse** :

$f(z)$ est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$, donc si et seulement si $\dfrac{x+2y-2}{x^2+y^2-2y+1} = 0$.

Dans cette fraction, le dénominateur est égal à $x^2+(y-1)^2$ qui ne peut être égal à 0 que si $x = 0$ et $y = 1$. Le couple $(0;1)$ est donc un couple interdit si jamais il est présent dans l'ensemble des solutions.

La fraction sera égale à 0 si son numérateur vaut 0 (et que son dénominateur ne vaut pas 0).

Or le numérateur vaut 0 si et seulement si $x+2y-2 = 0$, soit $y = -\dfrac{1}{2}x+1$.

Cette équation est une équation de droite : voilà l'ensemble des points $M$ cherché dans la question. Cette droite est privée du point $(0;1)$ (on l'en retire) car ce point correspond au couple interdit.

**b)** $f(z)$ soit un imaginaire pur.

**Réponse** :

$f(z)$ est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$, donc si et seulement si $\dfrac{x^2+y^2-2x-y}{x^2+y^2-2y+1} = 0$.

Le couple $(0;1)$ est encore une fois un couple interdit dans l'ensemble des solutions (à cause du dénominateur).

La fraction sera égale à 0 si son numérateur vaut 0 (et que son dénominateur ne vaut pas 0).

Or le numérateur vaut 0 si et seulement si $x^2+y^2-2x-y = 0$, soit $(x-1)^2+(y-0{,}5)^2 = 1{,}25$.

Cette équation est une équation du cercle de centre $(1;0{,}5)$ et de rayon $\sqrt{1{,}25}$ : c'est l'ensemble des points $M$ cherché dans la question. Ce cercle est privée du point $(0;1)$ qui correspond au couple interdit.

## ▶ Exercice n°2

Soit $P$ le polynôme défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 - \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.

**1.** Calculer $P(-1-\mathrm{i})$.

**Réponse** :

$P(-1-\mathrm{i}) = (-1-\mathrm{i})^3 + \mathrm{i}(-1-\mathrm{i}) - \mathrm{i}(-1-\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = 0$ d'après la calculatrice.

**2.** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout complexe $z$, $P(z) = (z+1+\mathrm{i})(z^2+az+b)$.

**Réponse** :

Développons $(z+1+\mathrm{i})(z^2+az+b) = z^3+az^2+bz+z^2+az+b+\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}az+\mathrm{i}b = z^3+(a+1+\mathrm{i})z^2+(b+a+\mathrm{i}a)z+b+\mathrm{i}b$.

Identifions avec le polynôme $P(z) = z^3+\mathrm{i}z^2-\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}$ : on doit avoir $\mathrm{i}z^2 = (a+1+\mathrm{i})z^2$, $-\mathrm{i}z = (b+a+\mathrm{i}a)z$ et $1+\mathrm{i} = b+\mathrm{i}b$.

La première équation fournit $\mathrm{i} = a+1+\mathrm{i}$, donc $a = -1$.

La dernière donne $1+\mathrm{i} = b(1+\mathrm{i})$, donc $b = 1$.

Celle du milieu est alors vérifiée, car $b+a+\mathrm{i}a = 1+(-1)+\mathrm{i}(-1) = -\mathrm{i}$.

On a donc $P(z) = (z+1+\mathrm{i})(z^2-z+1)$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**Réponse** :

Résoudre $P(z) = 0$ revient à résoudre $(z+1+\mathrm{i})(z^2-z+1) = 0$.

Cette équation est une produit nul, donc soit $z+1+\mathrm{i} = 0$, soit $z^2-z+1 = 0$.

La première donne $z = -1-\mathrm{i}$.

En calculant $\Delta = -3$, la deuxième donne $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Il y a donc 3 solutions à l'équation $P(z) = 0$ : $-1-\mathrm{i}$, $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.