Correction du devoir maison n°4

Partie A.

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	| Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Réponse :

u prend la valeur 5 ;

k prend la valeur 1 ;

u prend la valeur $0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times (1-1) - 1{,}5 = 1$;

k prend la valeur 2 ;

u prend la valeur $0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times (2-1) - 1{,}5 = -0{,}5$;

Quel nombre obtient-on en sortie ?

Réponse :

La valeur 0,5 est affichée en sortie.

Partie B.

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1,5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

Réponse :

Il suffit de déplacer l'instruction « *Afficher u* » en la mettant avant le « *fin pour* ».

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

Justifier.

Réponse :

On peut affirmer que la suite n'est pas décroissante car u_3 vaut $-0{,}75$ alors que u_4 vaut $-0{,}375$, qui est supérieur à $-0{,}75$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

Réponse :

• On a $u_3 = -0{,}75$ et $u_4 = -0{,}375$, donc $u_4 > u_3$: la propriété qu'on nous demande de démontrer est donc bien vérifiée pour $n = 3$.

• Supposons que, pour un certain rang n, on ait $u_{n+1} > u_n$. Montrons qu'alors on a obligatoirement $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Partons de $u_{n+1} > u_n$.

On a alors $0{,}5u_{n+1} > 0{,}5u_n$.

Comme $0{,}5n > 0{,}5(n-1)$, alors on peut affirmer que $0{,}5u_{n+1} + 0,5n > 0{,}5u_n + 0{,}5(n-1)$.

En retirant 1,5 à chaque membre de cette inégalité, on arrive à $0{,}5u_{n+1} + 0,5n - 1{,}5 > 0{,}5u_n + 0{,}5(n-1) - 1{,}5$, ce qui revient à $u_{n+2} > u_{n+1}$.

La propriété qu'on nous demande de démontrer est donc héréditaire.

• Puisque la propriété est héréditaire, et qu'elle est vraie pour le rang $n = 3$ alors, par récurrence, elle est vraie pour tous les rangs à partir du rang 3.

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Réponse :

On peut en déduire qu'à partir du rang 3, la suite u est strictement croissante.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0,5$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 ; exprimer alors v_n en fonction de n.

Réponse :

Soit n un rang quelconque.

On a $\begin{aligned} v_{n+1} &= 0{,}1u_{n+1} - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 \\ &= 0{,}1(0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5) - 0{,}1n - 0{,}1 + 0{,}5 \\ &= 0{,}05u_n + 0{,}05n - 0{,}15 - 0{,}1n + 0{,}4 \\ &= 0{,}05u_n - 0{,}05n + 0{,}25. \end{aligned}$

D'autre part, on a $0{,}5v_n = 0{,}5(0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5) = 0{,}05u_n - 0{,}05n + 0{,}25$.

On constate que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$, et cela quelle que soit la valeur de n.

La suite v est donc géométrique de raison 0,5.

On a $v_0 = 0{,}1u_0 - 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 = 0{,}1 \times 5 + 0{,}5 = 1$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 0{,}5^n = 0{,}5^n$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.

Réponse :

Puisque, pour tout entier naturel n, $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$, alors $0{,}1u_n = v_n + 0{,}1n - 0{,}5$, donc $u_n = 10v_n + n - 5$.

En remplaçant v_n par la formule explicite, on obtient $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Réponse :

Lorsque n tend vers $+\infty$, $0{,}5^n$ tend vers 0 (car 0,5 est compris entre -1 et 1).

On en déduit que $10 \times 0{,}5^n$ a pour limite 0 en $+\infty$.

La limite de u est donc celle de $n - 5$, qui est $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: la suite u diverge vers $+\infty$.