À RENDRE LE LUNDI 6 MARS 2017

Vous traiterez, au choix, soit l'un, soit l'autre, soit les deux exercices de ce devoir.

► Exercice n°1

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

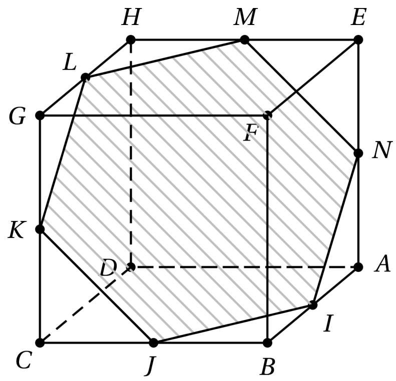
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a $D(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $A(0;1;0)$, $H(0;0;1)$ et $E(0;1;1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.



1. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

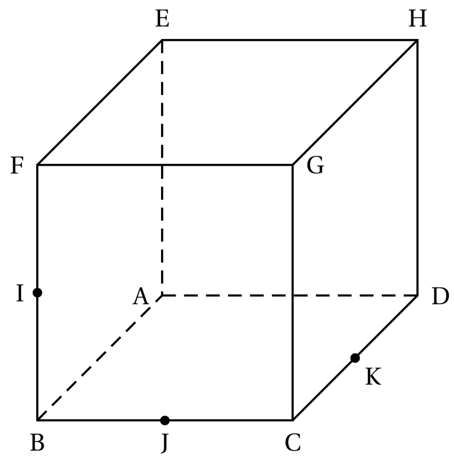
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

► Exercice n°2

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.

Le point I est le milieu du segment $[BF]$, J est le milieu de $[BC]$ et K celui de $[CD]$.

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

4. a) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N(1/2; 1/2; 1/2)$.

5. Démontrer que pour ce point N:

a) N appartient au plan (IJK).

b) La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).