Correction du devoir en classe n°1

▶ Exercice n°1

1. Calculer la somme $A = -15 + 3 + 21 + 39 + \ldots + 2361$ (montrer la démarche suivie).

Réponse :

On peut constater que les termes de la somme suivent une progression arithmétique (car $-15 + 18 = 3$, $3 + 18 = 21$, $21 + 18 = 39$, etc.)

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -15$ et de raison 18. On a $2361 = -15 + 18 \times 132$, donc $u_{132} = 2361$.

Le nombre A est donc la somme des 133 premiers termes de la suite u, donc $A = \dfrac{133}{2} \times (-15 + 2361) = 156\,009$.

2. Calculer la somme $G = 3 + 12 + 48 + 192 + \ldots + 50\,331\,648$ (idem).

Réponse :

Cette fois-ci les termes sont en progression géométrique ($3 \times 4 = 12$, $12 \times 4 = 48$, $48 \times 4 = 192$, etc.)

Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 4.

On doit trouver n tel que $50\,331\,648 = 3 \times 4^n$. En tâtonnant à la calculatrice, on obtient $n = 12$, donc $50\,331\,648 = v_{12}$.

Le nombre S est donc la somme des 13 premiers termes de la suite v, donc $S = 3 \times \dfrac{1 - 4^{13}}{1 - 4} = 67\,108\,863$.

▶ Exercice n°2

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 200$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,25u_n + 18$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.

Réponse :

$u_1 = 0{,}25 \times 200 + 18 = 68$, $u_2 = 0{,}25 \times 68 + 18 = 35$.

La suite u peut-elle être arithmétique ou géométrique ? Justifier.

Réponse :

- La suite u ne peut être arithmétique car $u_2 - u_1 = -33$ alors que $u_1 - u_0 = -132$: la raison serait variable.
- u ne peut non plus être géométrique car $\dfrac{u_2}{u_1} \simeq 0{,}515$ et $\dfrac{u_1}{u_0} = 0{,}34$: la raison serait variable.

b) À la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Réponse :

Voici quelques valeurs de termes de la suite u, arrondis à 3 ou 4 chiffres :

n	5	6	7	8	9	10	25
u_n	24,172	24,043	24,010	24,002	24,0007	24,0001	24,0

La suite semble décroissante et convergente vers la limite 24.

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 24$.

Réponse :

Soit $P(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 24$ ».

- Cette proposition est vraie au rang $n = 0$, car $u_0 = 200$ et $200 \geqslant 24$.
- Supposons que, pour un rang n fixé, on ait $u_n \geqslant 24$.

On a alors $0{,}25u_n \geqslant 6$, donc $0{,}25u_n + 18 \geqslant 24$, d'où $u_{n+1} \geqslant 24$: la proposition P est donc héréditaire.

- Puisque P a pu être initialisée au rang 0, et qu'elle est héréditaire, alors pour tout $n \geqslant 0$ elle est vraie, donc $u_n \geqslant 24$.

b) Calculer $u_{n+1} - u_n$. À l'aide de la question précédente, en déduire que la suite u est décroissante.

Réponse :

$u_{n+1} - u_n = 0{,}25u_n + 18 - u_n = -0{,}75u_n + 18$.

Puisqu'on sait que $u_n \geqslant 24$, alors $0{,}75u_n \geqslant 18$, donc $-0{,}75u_n \leqslant -18$, d'où $-0{,}75u_n + 18 \leqslant 0$: on vient de prouver que, pour tout rang n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite u est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c) La suite u est-elle convergente ? Justifier.

Réponse :

La suite u est décroissante et minorée (par 24), donc elle est convergente. Sa limite semble être 24 mais nous ne l'avons pas démontré, seulement conjecturé.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 24$.

a) Calculer v_0, v_1 et v_2. En déduire une conjecture sur la nature de la suite (v_n).

Réponse :

$v_0 = 200 - 24 = 176$, $v_1 = 68 - 24 = 44$ et $v_2 = 35 - 24 = 11$.

On a $\dfrac{v_2}{v_1} = 0{,}25$, et $\dfrac{v_1}{v_0} = 0{,}25$, donc la suite v semble être géométrique de raison 0,25.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour démontrer la conjecture faite.

Réponse :

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 24 = 0{,}25u_n + 18 - 24 = 0{,}25u_n - 6$.

D'autre part, $0{,}25v_n = 0{,}25(u_n - 24) = 0{,}25u_n - 6$, donc $v_{n+1} = 0{,}25v_n$: cela prouve que v est géométrique de raison 0,25.

c) En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Réponse :

D'après le cours, $v_n = v_0 \times q^n = 176 \times 0{,}25^n$.

Comme $v_n = u_n - 24$, alors $u_n = v_n + 24$, donc $u_n = 176 \times 0{,}25^n + 24$.

d) **(Bonus)** En déduire la limite de la suite (u_n).

Réponse :

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 176 \times 0 + 24 = 24$.

4. Proposer un algorithme qui permet de déterminer un rang N tel que $u_N < 24{,}0001$. On ne demande pas de le programmer sur la calculatrice, et on ne demande pas de déterminer le rang N en question.

Réponse :

Variables	n entier naturel
	u réel
Initialisation	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 200
Traitement	Tant que $u \geqslant 24{,}0001$
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0{,}25u + 18$
	Fin du Tant que
Sortie	Afficher n

On obtient $n = 11$.

5. **(Bonus)** Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n ; en déduire $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

Réponse :

$S = 176 \times \dfrac{1 - 0{,}25^{n+1}}{1 - 0{,}25} = \dfrac{704}{3}(1 - 0{,}25^{n+1})$ (somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique).

$S' = S + (n + 1) \times 24 = 24(n + 1) + \dfrac{704}{3}(1 - 0{,}25^{n+1})$.