Correction du devoir en classe n°2

▶ Exercice n°1 *(7 points)*

Soit u la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

1. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite u.

Réponse :

À la calculatrice, on obtient $u_1 \simeq 3{,}7$; $u_2 \simeq 3{,}2$; $u_3 \simeq 3{,}07$; $u_4 \simeq 3{,}02$; $u_5 \simeq 3{,}008$ donc on peut conjecturer que la suite u est décroissante et converge vers 3.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 3$.

Réponse :

• On a $u_0 = 5 > 3$, donc la propriété à démontrer est vraie pour le rang $n = 0$.

• Supposons que, pour un rang n fixé, on ait $u_n > 3$.

On a alors $\dfrac{1}{3}u_n > \dfrac{1}{3} \times 3 = 1$, donc $\dfrac{1}{3}u_n + 2 > 1 + 2 = 3$, ce qui revient, grâce à la relation qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n, à $u_{n+1} > 3$.

La propriété à démontrer est donc héréditaire.

• Puisque la propriété est vraie au rang 0, et qu'elle est héréditaire, alors elle est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux à 0 : autrement dit, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 3$.

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + 2$.

Réponse :

On sait que $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$, donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + 2$.

À l'aide de la question 2°, en déduire le sens de variation de la suite u.

Réponse :

On a prouvé que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 3$.

On a donc $-\dfrac{2}{3}u_n < -\dfrac{2}{3} \times 3 = -2$, donc $-\dfrac{2}{3}u_n + 2 < -2 + 2 = 0$.

On vient de prouver que, pour tout rang $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$: cela prouve que la suite u est strictement décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2° et 3° sur la convergence de la suite u ?

Réponse :

La suite u est décroissante, et elle est minorée, donc elle converge (elle possède une limite finie).

5. Soit v la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n - 3$.

Conjecturer la nature de la suite v, puis démontrer cette conjecture.

Réponse :

À la calculatrice, on obtient $v_0 = 2$; $v_1 = \dfrac{2}{3}$; $v_2 = \dfrac{2}{9}$; $v_3 = \dfrac{2}{27}$; $v_4 = \dfrac{2}{81}$.

On constate que $v_1 \div v_0 = v_2 \div v_1 = v_3 \div v_2 = v_4 \div v_3 = \dfrac{1}{3}$, donc on peut conjecturer que v est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Pour démontrer cette conjecture, prouvons que, pour tout rang $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.

• D'une part, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \dfrac{1}{3}u_n - 1$.

• D'autre part, $\dfrac{1}{3}v_n = \dfrac{1}{3} \times (u_n - 3) = \dfrac{1}{3}u_n - 1$.

On constate que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$, donc cela prouve que la suite v est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

6. Donner l'expresi et seulement sion de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

Réponse :

D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2}{3^n}$.

Comme $v_n = u_n - 3$, alors $u_n = v_n + 3$, donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{2}{3^n} + 3$.

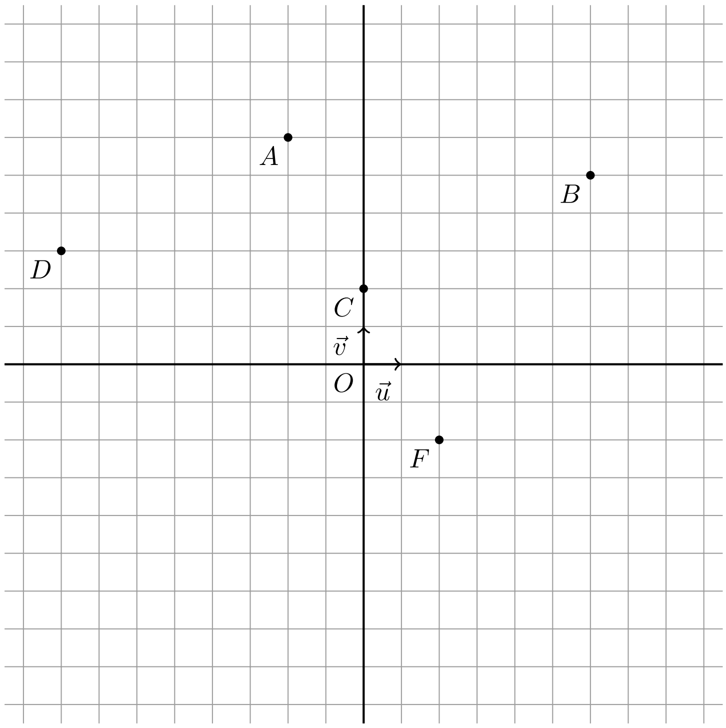
(Bonus) En déduire (en justifiant) la limite de la suite u.

Réponse :

Lorsque n tend vers $+\infty$, alors 3^n tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{2}{3^n}$rapproche de 0. On en déduit alors que u_n tend vers 3.

▶ Exercice n°2 *(4 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe $-2+6\text{i}$, B d'affixe $6+5\text{i}$ et C d'affixe 2i.



1. Faire une figure, y placer les points A, B et C.

2. Déterminer par le calcul l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Réponse :

Il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $z_B - z_A = x_C - z_D$. On en déduit $z_D = z_C + z_A - z_B$, soit $z_D = 2\text{i} - 2 + 6\text{i} - (6+5\text{i}) = -8+3\text{i}$.

3. Soit E le point d'affixe 46. Montrer que A, B et E sont alignés.

Réponse :

Vérifions si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 6+5\text{i} - (-2+6\text{i}) = 8 - \text{i}$.
- $z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = 46 - (-2+6\text{i}) = 48 - 6\text{i}$.

On constate que $z_{\overrightarrow{AB}} \times 6 = z_{\overrightarrow{AE}}$,donc $\overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires, ce qui fait que les points A, B et E sont alignés.

4. Déterminer par le calcul l'affixe du point F tel que C soit le milieu du segment $[AF]$.

Réponse :

On veut que $z_C = \dfrac{z_A + z_F}{2}$. Cela revient à $2z_C = z_A + z_F$, donc $z_F = 2z_C - z_A$.

En remplaçant les valeurs, on obtient $z_F = 2 \times 2\text{i} - (-2+6\text{i}) = -2\text{i} + 2$.

▶ Exercice n°3 *(2 points)*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(5+\text{i})z - 3 = 2\text{i}z - 1 + 8\text{i}$. On donnera la (ou les) solution(s) sous forme algébrique.

Réponse :

Cette équation est du premier degré en z, donc on isole z :

$(5+\text{i})z - 3 = 2\text{i}z - 1 + 8\text{i} \iff (5+\text{i}) - 2\text{i}z = -1 + 8\text{i} + 3 \iff (5-\text{i})z = 2 + 8\text{i} \iff z = \dfrac{2+8\text{i}}{5-\text{i}}$.

La calculatrice fournit alors $z = \dfrac{1}{13} + \text{i}\dfrac{21}{13}$.

▶ Exercice n°4 *(3 points)*

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $P(z) = 3z^3 - 22z^2 + 59z + 50$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (3z+2)(z^2 - 8z + 25)$.

Réponse :

Développons et réduisons $(3z+2)(z^2-8z+25)$:

$(3z+2)(z^2-8z+25) = 3z^3 - 24z^2 + 75z + 2z^2 - 16z + 50 = 3z^3 - 22z^2 + 59z + 50$.

On retrouve bien $P(z)$, et cela quelle que soit la valeur de z nombre complexe.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Réponse :

Résoudre $P(z) = 0$ revient à résoudre $(3z+2)(z^2-8z+25) = 0$.

Cette dernière équation est un produit nul : on a soit $3z+2=0$, soit $z^2-8z+25=0$.

• $3z+2=0 \iff z = -\dfrac{2}{3}$.

• Calculons le discriminant de $z^2-8z+25$: on a $\Delta = -36$, donc $z_1 = \dfrac{8+6\mathrm{i}}{2} = 4+3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4-3\mathrm{i}$ sont les deux racines du polynôme $z^2-8z+25$.

On en déduit que l'équation $P(z) = 0$ a donc 3 solutions : $-\dfrac{2}{3}$, $4-3\mathrm{i}$ et $4+3\mathrm{i}$.

▶ Exercice n°5 *(4 points)*

On considère la fonction f définie pour tout complexe z différent de $2\mathrm{i}$ par $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$.

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant des nombres réels.

1. Montrer que, pour tout complexe $z \neq 2\mathrm{i}$, $f(z) = \dfrac{x^2+y^2-y-2}{x^2+y^2-4y+4} + \mathrm{i}\dfrac{3x}{x^2+y^2-4y+4}$.

Réponse :

On a $f(z) = \dfrac{x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y-2\mathrm{i}} = \dfrac{(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i})\times(x-\mathrm{i}y+2\mathrm{i})}{(x+\mathrm{i}y-2\mathrm{i})\times(x-\mathrm{i}y+2\mathrm{i})}$.

On développe : $f(z) = \dfrac{x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2y^2 + 2\mathrm{i}^2y + \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2y + 2\mathrm{i}^2}{x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2y^2 + 2\mathrm{i}^2y - 2\mathrm{i}x + 2\mathrm{i}^2y - 4\mathrm{i}^2}$.

On réduit : $f(z) = \dfrac{x^2+3\mathrm{i}x+y^2-y-2}{x^2+y^2-4y+4} = \dfrac{x^2+y^2-y-2}{x^2+y^2-4y+4} + \mathrm{i}\dfrac{3x}{x^2+y^2-4y+4}$.

2. On considère l'ensemble (A) des points du plan, consitué des points $M(x;y)$ tels que $f(z)$ soit un réel.

Déterminer la nature géométrique de (A).

Réponse :

$f(z)$ est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, donc si $\dfrac{3x}{x^2+y^2-4y+4} = 0$.

En supposant que le dénominateur n'est pas nul (donc $(x;y) \neq (0;2)$), cela revient à $3x = 0$, donc $x = 0$.

Cette équation est une équation cartésienne de l'axe des ordonnées ; en en retirant le point de coordonnées $(0;2)$, on obtient l'ensemble (A) recherché.

3. On considère l'ensemble (B) des points du plan, consitué des points $M(x;y)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

Déterminer la nature géométrique de (B).

Réponse :

$f(z)$ est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, donc si $\dfrac{x^2+y^2-y-2}{x^2+y^2-4y+4} = 0$.

En supposant que le dénominateur n'est pas nul (donc $(x;y) \neq (0;2)$), cela revient à $x^2+y^2-y-2 = 0$, ou encore $x^2 + (y-0{,}5)^2 = 2{,}25$.

Cette équation est une équation cartésienne du cercle de centre $(0;0{,}5)$ et de rayon $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

C'est l'ensemble (B) recherché, à condition d'en retirer le point de coordonnées $(0;2)$.