Correction du devoir en classe n°3

▶ Exercice n°1 *(9 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;1;-2)$, ainsi que la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

Réponse :

En utilisant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point A, une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1+2k \\ y = 1-k \\ z = -k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. Le plan (ABC) est-il unique ?

Réponse :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'ont pas des coordonnées proportionnelles donc les points A, B, C ne sont pas alignés.
Le plan (ABC) est donc unique.

3. Les droites (Δ) et (AB) sont-elles coplanaires ?

Réponse :

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

• Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, donc (Δ) et (AB) ne sont pas parallèles.

• Un point $M(x;y;z)$ sera point d'intersection de (Δ) et de (AB) si et seulement si il existe deux réels t et k tels que $\begin{cases} x = 2t = 1+2k \\ y = 1+t = 1-k \\ z = -5+3t = -k \end{cases}$.

L'équation $1+t = 1-k$ donne $t = -k$; la première devient donc $-2k = 1+2k$, donc $-1 = 4k$, soit $k = -0{,}25$.

On en déduit $t = \dfrac{1+2\times(-0{,}25)}{2} = 0{,}25$ dans la première équation, $t = 0{,}25$ dans la deuxième équation et $t = \dfrac{0{,}25+5}{3} = 1{,}75$ dans la troisième : cela prouve que le système n'a pas de solution, donc que (Δ) et (AB) ne peuvent pas être sécantes.

On en conclut que (Δ) **et** (AB) **ne sont pas coplanaires**.

4. On considère le point E de coordonnées $(3{,}2;2{,}6;-0{,}2)$

a) Montrer que E appartient à la droite (Δ).

Réponse :

En prenant $t = 1{,}6$ dans la représentation paramétrique de (Δ), on obtient $x = 3{,}2$, $y = 2{,}6$ et $z = -0{,}2$, qui sont les coordonnées de E, donc E appartient à (Δ).

b) Les points A, B, C et E sont-ils coplanaires ?

Réponse :

Les points A, B, C et E sont coplanaires si et seulement si on peut trouver deux réels m et p tels que $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$.

On doit donc avoir $\begin{cases} 2{,}2 = 2m+6p \\ 1{,}6 = -m \\ -0{,}2 = -m-2p \end{cases}$.

D'après la 2ème équation, $m = -1{,}6$. La première fournit $p = \dfrac{2{,}2-2m}{6} = -1/6$, et la troisième $p = \dfrac{0{,}2-m}{2} = 0{,}9$: le système n'a donc pas de couple $(m;p)$ solution, ce qui fait que A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

c) Déterminer la position relative de la droite (Δ) par rapport au plan (ABC) (c'est-à-dire, la droite est-elle sécante, parallèle ou incluse dans le plan ?).

Réponse :

• La droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) si et seulement si on peut trouver deux réels m et p tels que $\vec{u}$(vecteur directeur de (Δ)) $= m\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2 = 2m + 6p \\ 1 = -m \\ 3 = -m - 2p \end{cases}$.

On obtient $m = -1$ et $p = 2/3$: le système a un couple $(m;p)$ solution donc (Δ) est soit strictement parallèle à (ABC), soit incluse dans (ABC).

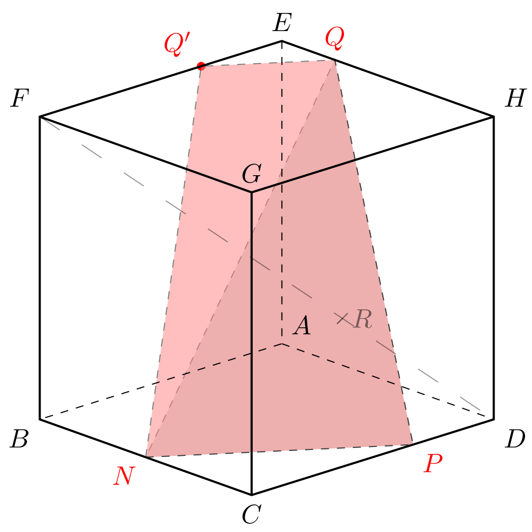
Or nous avons vu que E est sur (Δ) mais pas dans le plan (ABC) : donc (Δ) est strictement parallèle à (ABC).

▶ Exercice n°2 *(6 points)*

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

Dans ce cube, on définit les points N, P, Q et R par :

- N est le milieu du segment $[BC]$;
- $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$;
- $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$;
- $\overrightarrow{FR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$.



1. Après avoir choisi un repère orthonormé dans ce cube, donner les coordonnées des points N, P, Q et R (aucune justification n'est attendue).

Réponse :

Avec le repère $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$: $N(0{,}5;0;0)$, $P(0;2/3;0)$, $Q(3/4;1;1)$ par lecture graphique.

Pour les coordonnées de R, avec les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{FD}$ on est amenés à résoudre le système $\begin{cases} x_R - 1 = 2/3 \times (-1) \\ y_R - 0 = 2/3 \times 1 \\ z_R - 1 = 2/3 \times (-1) \end{cases}$ donc R a pour coordonnées $(1/3; 2/3; 1/3)$.

2. Tracer sur la figure ci-contre la section du cube par le plan (NPQ).

Réponse :

Voir ci-contre (ce n'est pas le triangle NPQ ! La droite (QQ') est parallèle à (NP)...).

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD), de paramètre t.

Réponse :

Avec le point F et le vecteur $\overrightarrow{FD}$: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Soit M un point se trouvant sur la droite (FD). Calculer la distance MN en fonction de t.

Réponse :

$MN = \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2} = \sqrt{(1 - t - 0{,}5)^2 + (t - 0)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{(0{,}5 - t)^2 + 2t^2}$.

c) Déterminer le nombre t_0 pour lequel la fonction $f(t) = MN^2$ admet un minimum.

Réponse :

On a $f(t) = (0{,}5 - t)^2 + 2t^2 = 0{,}25 - t + t^2 + 2t^2 = 0{,}25 - t + 3t^2$.

Cette fonction du second degré a comme représentation graphique une parabole en $\cup$, dont l'axe de symétrie a pour abscisse $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{6}$: c'est la valeur t_0 cherchée.

En déduire la valeur minimum que la distance MN peut prendre, ainsi que les coordonnées du point M pour cette distance minimum.

Réponse :

Le minimum de f est $f(1/6) = 1/6$, donc la valeur minimum de MN est $\sqrt{1/6}$.
Avec la représentation paramétrique de (FD), on trouve que les coordonnées de M sont alors $x = 1 - 1/6 = 5/6$, $y = 1/6$ et $z = 1 - 1/6 = 5/6$.

▶ Exercice n°3 *(5 points)*

Soit u la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 4 \end{cases}$.

1. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite u.

Réponse :

Après avoir calculé les dix premiers termes de la suite u, on conjecture que u est décroissante et converge vers -8.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > -8$.

Réponse :

• On a visiblement $u_0 > -8$ car $u_0 = 5$.
• Supposons que, pour un rang n fixé, on ait $u_n > -8$.
Alors on a $\dfrac{1}{2}u_n > -4$, donc $\dfrac{1}{2}u_n - 4 > -8$, autrement dit $u_{n+1} > -8$.
La propriété à démontrer est donc héréditaire.
• Puisque la propriété est vraie au rang 0, et qu'elle est héréditaire, alors par récurrence elle est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux à 0.

3. Montrer que la suite u est décroissante.

Réponse :

Montrons que u_{n+1} est toujours inférieur à u_n : en effet,
$u_{n+1} < u_n \iff \dfrac{1}{2}u_n - 4 < u_n \iff -4 < \dfrac{1}{2}u_n \iff -8 < u_n$.
Autrement dit, $u_{n+1} < u_n$ pour les rangs n pour lesquels $-8 < u_n$.
Or on a montré que $-8 < u_n$ pour tous les rangs $n \geqslant 0$, donc on peut en conclure que $u_{n+1} < u_n$ pour tous les rangs $n \geqslant 0$: autrement dit, la suite u est décroissante.

4. Soit v la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n + 8$.

a) Montrer que la suite v est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Réponse :

On a, pour tout rang $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 8 = \dfrac{1}{2}u_n - 4 + 8 = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.

D'autre part, pour tout rang $n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2}v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + 8) = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.

Donc, pour tout rang $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, ce qui prouve que la suite v est géométrique de raison 0,5.

b) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, v_n en fonction de n.

Réponse :

On a $v_0 = u_0 + 8 = 13$.
Pour tout rang $n \geqslant 0$, $v_n = 13 \times 0{,}5^n$.

c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'expression de u_n en fonction de n, puis la limite de la suite (u_n).

Réponse :

Puisque $u_n + 8 = v_n$ alors $u_n = v_n - 8$, donc pour tout rang $n \geqslant 0$ $u_n = 13 \times 0{,}5^n - 8$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $0{,}5^n$ tend vers 0 (car $-1 < 0{,}5 < 1$), donc $13 \times 0{,}5^n$ tend vers 0. La limite de (u_n) est donc $0 - 8 = -8$.