

► Exercice n°1 (8 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + (1 - x)e^{2x}$.

- Montrer que la dérivée f' de f a pour expression $f'(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Afin d'étudier le signe de f' , on pose $g(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$, puis on étudie la fonction g afin d'en faire le tableau de signe.
 - Montrer que l'expression de la dérivée g' de g est $g'(x) = -4xe^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
 - Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions? Justifier, et donner une valeur approchée à 10^{-2} de la (ou des) solution(s).
 - En déduire le tableau de signe de g sur \mathbb{R} .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f en justifiant à l'aide des questions précédentes.

► Exercice n°2 (2 points)

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

► Exercice n°3 (8 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un grand garage.

Partie A.

Les factures du garage sont de deux types : les factures provenant de l'atelier de mécanique et les factures provenant de l'atelier de carrosserie.

On admet, qu'un mois donné, 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie.

Dans l'ensemble des factures de ce mois, 2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées et 1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées.

On prélève au hasard une facture dans l'ensemble des factures de ce mois. Toutes les factures ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- M : « la facture prélevée provient de l'atelier de mécanique » ;
- C : « la facture prélevée provient de l'atelier de carrosserie » ;
- D : « la facture est erronée ».

- Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
- Donner les valeurs des probabilités $P(M)$, $P(C)$, $P_M(D)$ et $P_C(D)$.
- Calculer la valeur exacte de $P(D)$.
- Calculer la probabilité que la facture prélevée provienne de l'atelier de carrosserie sachant qu'elle est erronée.

Partie B.

À la fin d'un autre mois, on considère une liasse importante de factures.

On note E l'évènement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée ». On suppose que $P(E) = 0,05$.

On prélève au hasard 10 factures dans la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures de ce prélèvement qui sont erronées.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres n et p .
 - Calculer l'espérance mathématique E de la variable aléatoire X . Comment interpréter la valeur de E ?

Dans les questions qui suivent, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4} .

- Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.
 - Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins une facture soit erronée.
 - Calculer la probabilité qu'au moins 8 des 10 factures ne soient pas erronées.

► Exercice n°4 (2 points)

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note R l'évènement « la personne choisie habite en zone rurale », et D l'évènement « la personne choisie est atteinte de diabète ».

- Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
- La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?