Exponentielle – extraits du baccalauréat 2016

▶ Exercice n°1

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication: on pourra utiliser que, pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

▶ Exercice n°2

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Soit v_1 la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement.

On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas $6\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

▶ Exercice n°3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1-x}}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).

▶ Exercice n°4

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}}$, où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. a) Calculer $f(0)$.

b) Démontrer que, pour tout réel $t > 0$, $f(t) < 50$.

c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

Résoudre l'inéquation d'inconnue t: $f(t) > 30$.

En déduire la réponse au problème.

▸ Exercice n°5

Joël, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Joël est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Joël veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture.

On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0{,}2\,\mathrm{g.L}^{-1}$ pour un jeune conducteur.

a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

b) Quelle durée minimale Joël doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{g.L}^{-1}$.

a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) On donne l'algorithme ci-contre où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.

Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Initialisation :	t prend la valeur 3,5
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

▸ Exercice n°6

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$°C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$°C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

On suppose qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. Étudier le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$.

2. Comment interpréter physiquement la valeur de la limite de f quand t tend vers $+\infty$?

3. Justifier que si $t > 10$ alors $f(t) > 85$.

En déduire la réponse au problème.