On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

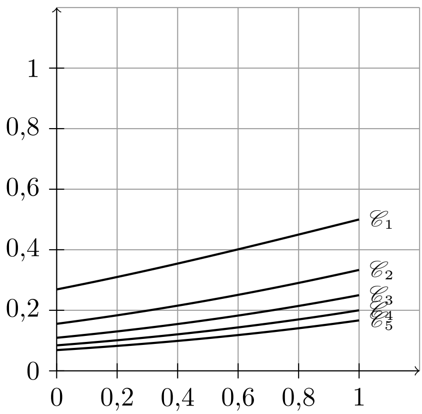
Partie B.

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.



2. Soit n un entier naturel. Interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n)? Démontrer cette conjecture.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?