Baccalauréat Juin 2016 – Métropole

Partie A.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

4. On considère l'algorithme ci-contre.

a) Que fait cet algorithme ?

b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Variables :	N et A des entiers naturels
Entrée :	Saisir la valeur de A
Traitement :	N prend la valeur 0
	Tant que $N - \ln(N^2+1) < A$
	| N prend la valeur $N+1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher N

Partie B.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.

En déduire la valeur de l.