Théorème de récurrence

▶ Exercice n°1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.

▶ Exercice n°2

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Calculer les dix premiers termes de la suite u.

2. a) Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?

b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

▶ Exercice n°3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

▶ Exercice n°4

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Exprimer pour tout $n \geqslant 0$ le résultat de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n.

Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_n \geqslant 4$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 4$.

En déduire le sens de variation de u.

▶ Exercice n°5

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

Démontrer par récurrence que $0 < u_n < 2$.

▶ Exercice n°6

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.