# *Fonctions et intégration – exercices (n° 3)*

## ▶ Exercice n°1

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal *(commencer par faire une représentation graphique de $f$ sur la calculatrice)*.

### Partie A.

**1. a)** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**b)** Démontrer que $f$ admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

**2.** Soit un reel $a \geqslant 0$. On note $F(a)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

**a)** Exprimer $F(a)$ en fonction de $a$ *(on rappelle que la dérivée de la fonction $\mathrm{e}^u$ est $u'\mathrm{e}^u$)*.

**b)** Quelle est la limite de $F(a)$ quand $a$ tend vers $+\infty$?

### Partie B (facultative – pour futurs CPGE ou licence de math).

On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à expliciter $u_n$.

**1.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

**2.** Quel est le sens de variation de la suite $u$?

**3.** Montrer que la suite $u$ converge. Quelle est sa limite ?

## ▶ Exercice n°2

Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}$ *(commencer par faire une représentation graphique de $f$ et $g$ sur la calculatrice)*.

### Partie A – Étude des fonctions $f$ et $g$.

**1.** Déterminer les limites de $f$ et $g$ en $-\infty$.

**2.** Déterminer les limites de $f$ et $g$ en $+\infty$.

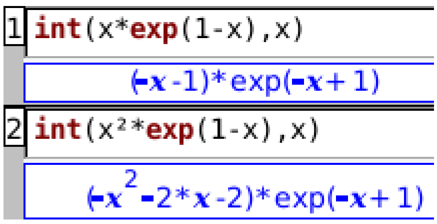
**3.** Dresser le tableau de variation de $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$.

### Partie B.

Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ et $\Gamma$ celle de $g$.

**1.** Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\Gamma$.

**2.** Pour obtenir des primitives de $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$, on a réalisé sur le logiciel de calcul formel Xcas la recherche ci-contre *(la commande* `int` *de Xcas permet de trouver une primitive de la fonction donnée en argument ; le « virgule $x$ » à la fin de la commande indique que $x$ est la variable de cette fonction)*.




En utilisant les résultats du logiciel, calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

**3.** On note $\mathscr{A}$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$, $\Gamma$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que $\mathscr{A} = 3 - \mathrm{e}$.

### Partie C – facultative (futurs CPGE et licence de maths).

Soit $a$ un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par $S(a)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$, $\Gamma$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

On admet que $S(a) = 3 - \mathrm{e}^{1-a}(a^2 + a + 1)$.

Existe-t-il une valeur de $a$ pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales ? Si oui, cette valeur de $a$ est-elle unique, ou y en a-t-il plusieurs ?