Suites majorées, minorées, bornées

▶ Exercice n°1 *(suite explicite)*

1. Résoudre l'inéquation $n^2 - 2n + 3 \geqslant 2$.

2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 2n + 3$?

▶ Exercice n°2 *(suite explicite)*

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{5n}{n+1} \leqslant 5$.

2. Que peut-on en déduire pour la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{5n}{n+1}$?

▶ Exercice n°3 *(suite récurrente)*

Montrer par récurrence que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$ est majorée par 4 et minorée par -3.

▶ Exercice n°4

On considère deux suites u et v qui vérifient pour tout entier naturel n l'inégalité $u_n \leqslant v_n$.

Les affimations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si (v_n) est convergente alors (u_n) est convergente.

2. Si (u_n) diverge alors (v_n) diverge.

3. Si (v_n) est bornée alors (u_n) est majorée.

4. Si (v_n) est décroissante alors (u_n) est majorée.

▶ Exercice n°5

La suite u est définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. Montrer que cette suite est majorée par 6.

2. Montrer que cette suite est croissante.

3. Que peut-on en conclure quant à la convergence de la suite (u_n) ?

4. Calculer u_{10}. Que peut-on conjecturer ?

▶ Exercice n°6

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

1. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < 3$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

2. On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a) Montrer que la suite v est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Déterminer v_n en fonction de n (formule explicite de v_n) ; en déduire u_n en fonction de n.

c) Que peut-on en déduire à propose de la convergence de la suite (u_n) ?