Exponentielle complexe

Par des considérations mathématiques étudiées dans l'enseignement supérieur, on démontre que, pour tout nombre réel x, le résultat de $\exp(\mathrm{i}x)$ est $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ (i étant évidemment le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)}$$

Soit M un point du plan.

On peut repérer M soit par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$, soit par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$.

Si l'axe des abscisses du repère cartésien est l'axe polaire, alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

On a donc alors $x + \mathrm{i}y = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Autrement dit, $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une façon de repérer le point M dans le plan complexe, mais en utilisant les coordonnées polaires de M.

Le nombre r est alors appelé le module du nombre complexe $x+\mathrm{i}y$, et θ est l'argument de $x + \mathrm{i}y$. Les notations utilisées sont $r = |x + \mathrm{i}y|$, et $\theta = \arg(x + \mathrm{i}y)$.

On peut remarquer que $r^2 = x^2 + y^2$ (car, pour tout réel θ, $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$).

▶ Exercice n°1

Déterminer les affixes des points repérés par les exponentielles complexes suivantes :

1°/ $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ **2°/** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **3°/** $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ **4°/** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$
5°/ $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi}$ **6°/** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **7°/** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ **8°/** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$

▶ Exercice n°2

Déterminer l'écriture sous forme exponentielle de chacune des affixes suivantes.

1°/ $1 + \mathrm{i}$ **2°/** $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ **3°/** $1 - \mathrm{i}$ **4°/** $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$
5°/ $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ **6°/** $-5\mathrm{i}$ **7°/** 3 **8°/** -3

▶ Exercice n°3

Propriétés des modules et des arguments: z_1 et z_2 désignent des nombres complexes quelconques, et n un nombre entier relatif.

$\|z_1 \times z_2\| = \|z_1\| \times \|z_2\|$	$\|{z_1}^n\| = \|z_1\|^n$	$\left\|\dfrac{z_1}{z_2}\right\| = \dfrac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$
$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$	$\arg({z_1}^n) = n \times \arg(z_1)$	$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Déterminer le module de chacun de ces nombres complexes :

1°/ $(4 + 3i)(5 - \mathrm{i})$ **2°/** $(2 - 3\mathrm{i})^5$ **3°/** $\dfrac{5}{(6 - \mathrm{i})^2}$