

Propositions, propriétés, théorème de récurrence

► Exercice n°1

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la propriété P_n suivante :
« l'entier obtenu en calculant $n^2 - n + 41$ est premier (c'est-à-dire qu'il a pour seuls diviseurs 1 et lui-même) ».

1. La propriété P_1 est-elle vraie? Et P_2 ? P_3 ? P_4 ? P_{10} ? P_{20} ? P_{30} ?
2. La propriété P_n est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

► Exercice n°2

Un polygone est dit **convexe** lorsque tout segment joignant deux points situés strictement à l'intérieur du polygone est contenu strictement dans l'intérieur du polygone.

Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant 100 sommets.

Indices : on pourra commencer par déterminer le nombre de diagonales de polygones convexes ayant 3, 4, 5 ou 6 sommets (voire plus).

Il faudra alors chercher une relation entre le nombre n de sommets et le nombre d_n de diagonales du polygone.

Pour prouver cette conjecture, on pourra chercher une relation entre les nombres de diagonales d_n et d_{n+1} de deux polygones convexes ayant respectivement n et $n + 1$ sommets, et démontrer que cette relation est vraie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 3.

► Exercice n°3

Pour tout entier naturel n , on considère les deux propriétés P_n et Q_n suivantes :

P_n : « le résultat de $10^n - 1$ est un multiple de 9 » ;

Q_n : « $10^n + 1$ »

1. Démontrer que, si P_n est vraie à un rang n particulier fixé, alors P_{n+1} est vraie aussi.
2. Faire de même pour Q (donc prouver que, si on suppose Q_n vraie pour un rang n fixé, alors Q_{n+1} est vraie au rang suivant).
3. Les propriétés P_n et Q_n sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

► Exercice n°4

Vrai ou faux? $\sum_{k=1}^{k=n} (2k - 1) = n^2$ (autrement dit, la somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2).

► Exercice n°5

Soit x un réel différent de 1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (interdit de se servir de la somme des termes d'une suite géométrique!).