Limites de suites

▶ Exercice n°1

Pour chacune de ces suites, en calculant différents termes, conjecturer la valeur limite de u_n quand n devient infiniment grand (c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$).

1°/ $u_n = \dfrac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$ **2°/** $u_n = 3n^2 - 1$ pour $n \geqslant 0$ **3°/** $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ pour $n \geqslant 0$

4°/ $u_n = 2^n$ pour $n \geqslant 0$ **5°/** $u_n = \dfrac{2n+1}{n-5}$ pour $n \geqslant 6$ **6°/** $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 0$

▶ Exercice n°2

On considère la suite u_n définie par récurrence par $u_0 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner un tableau des valeurs approchées à 10^{-3} de u_1 à u_{10}. Conjecturer le sens de variation ainsi la valeur limite l de la suite u.

2. Déterminer le plus petit entier n pour lequel on a $u_n < 2{,}0000001$.

3. Écrire un algorithme saisissant un nombre réel A, et affichant le plus petit rang n tel que $u_n \leqslant A$.

▶ Exercice n°3

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 2$.

1. En utilisant une calculatrice, donner des valeurs approchées de u_1 à u_{10}, puis des valeurs approchées de u_{20} et de u_{50} ; conjecturer le sens de variation de u.

2. Démonter par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 8$, on a $4{,}9 \leqslant u_n \leqslant 5{,}1$.

3. Déterminer un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $4{,}999 \leqslant u_n \leqslant 5{,}001$.

4. (question facultative) Soit h un réel strictement positif. Montrer que si $5 - h < u_n < 5 + h$ alors $5 - h < u_{n+1} < 5 + h$. Que se passe-t-il si on prend h de plus en plus proche de 0 ?

▶ Exercice n°4

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

1. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \in]-0{,}1; 0{,}1[$ (autrement dit $-0{,}1 \leqslant u_n \leqslant 0{,}1$).

2. Même consigne avec l'intervalle $]-10^{-5}; 10^{-5}[$.

▶ Exercice n°5

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$

1. Donner grâce à la calculatrice des valeurs approchées à 10^{-2} de u_1 à u_{10}.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite u ?

2. (question facultative) Soit r un nombre réel strictement positif.

Montrer qu'à partir d'un certain rang N à déterminer en fonction de r, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]2 - r; 2 + r[$ (autrement dit, $2 - r \leqslant u_n \leqslant 2 + r$ lorsque $n \geqslant N$).

▶ Exercice n°6

On considère la suite u définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{3n^2+100}{7n}$.

1. À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture sur la convergence de la suite u peut-on faire ?

2. Déterminer, dans les différents cas donnés ci-contre pour le nombre A, le plus petit rang N tel que, pour tout rang n dépassant N, u_n est dans l'intervalle $]A; +\infty[$.

A	10	20	100	1000	100000
n	1	46			

On pourra répondre à cette question au choix par tâtonnements, à l'aide d'un algorithme ou à l'aide d'inéquations.

▶ Exercice n°7

On considère la suite u définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 11}{5}$.

1. Donner les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3, puis en donner des valeurs décimales à 10^{-2} près.

2. En utilisant une calculatrice, quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite u ?

3. On considère un nombre réel A. En utilisant un algorithme, déterminer, dans les différents cas ci-contre, le premier rang N à partir duquel, pour $n \geqslant N$, u_n appartient à l'intervalle $]A; +\infty[$.

A	10	20	100	5000	12000	250000
n						

La conjecture faite à la question précédente est-elle confortée ?

▶ Exercice n°8

Conjecturer les limites éventuelles des suites u, v, w et z définies sur $\mathbb{N}$ comme suit :

$u_n = (-1)^n$ $v_n = (-2)^n$ $w_n = (-0{,}1)^n$ $z_n = (-n)^n$