Probabilités conditionnelles – exercices (fiche n°1)

► Exercice n°1

Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers tels que $P(A) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.

Calculer $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

► Exercice n°2

Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers tels que $P(A) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}65$. Calculer $P(B)$.

► Exercice n°3

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I, X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

• à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O;

• les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X, et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle passer par le sommet I;

• les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;

• on ne tient pas compte des passages par le point O.

Partie A – un seul robot.

Un seul robot se trouve en O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $1/5$.

2. On note E l'événement « *Au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les trois sommets S, I et X dans cet ordre* ».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $4/125$.

3. On note F l'événement « *Au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les sommets S, I et X dans un ordre quelconque* ».

Déterminer la probabilité de F.

Partie B – un seul robot.

Des robots se retrouvent au point O, leurs deplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement « *Au moins l'un de ces robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre* » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

► Exercice n°4

Une urne A contient 4 boules rouges et 6 boules noires. Une urne B contient 1 boule rouge et 9 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A.

Un joueur dispose d'un dé à 6 faces parfaitement équilibré. Il le lance une fois. Si il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « *Le joueur obtient une boule rouge* ». Montrer que $P(R) = 0{,}15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B.

Le joueur répète 2 fois l'expérience décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (la boule tirée la 1ère fois est remise dans l'urne dont elle provient).

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros si il obtient une boule rouge, et perd 2 euros si il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur au terme des deux épreuves.

1. Justifier que la variable aléatoire G peut prendre les valeurs $2x$, ou $x - 2$, ou -4.

2. Trouver la loi de probabilité de G (c'est-à-dire, calculer la probabilité de chacune des valeurs que G peut prendre).

3. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.

4. Pour quelle valeurs de x a-t-on $E(G) \geqslant 0$?

► Exercice n°5

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir. Sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas ;

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On définit les événements suivants : M: « *l'animal est porteur de la maladie* », et T: « *le test est positif* ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit 5 animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût d'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau ci-contre.

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058	0,001 5

a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

► Exercice n°6

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne la première partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « *le joueur gagne la n-ième partie* ».
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?