Baccalauréat – Métropole, Juin 2015

▶ Exercice *(5 points)*

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z: $z^2 - 8z + 64 = 0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\mathrm{c} = 8\mathrm{i}$.

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d**. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

a) Montrer que $b' = 8$.

b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2 + 2\sqrt{3})$.

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST? Justifier ce résultat.