Probabilités conditionnelles

▶ Exercice n°1

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but.

Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.

Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :

– la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à 0,8 ;

– s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,7 ;

– s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,5.

On note R_1 l'événement : « le premier tir au but est réussi » et $\overline{R_1}$ son événement contraire ; R_2 l'événement : « le second tir au but est réussi » et $\overline{R_2}$ son événement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que les deux tirs au but soient réussis.

3. a) Calculer la probabilité que le second tir au but soit réussi.

b) Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

4. On note A l'événement : « Jean a réussi exactement un tir au but ». Montrer que $p(A) = 0{,}34$.

▶ Exercice n°2

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit »).

Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle , soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.

60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locatires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.

On interroge au hasard une famille de la région et on note :

A l'événement : « la famille habite un appartement »

L l'événement : « la famille est locataire »

P l'événement : « la famille est propriétaire »

G l'événement : « la famille est occupant à titre gratuit »

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.

$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.

1. a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p_P(\overline{A})$, $p_L(A)$ et $p_G(\overline{A})$.

b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Calculer la probabilité de l'événement :« la famille est propriétaire et habite un appartement ».

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.

4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.

▶ Exercice n°3

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.

Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :
– 20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
– 30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
– 40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'événement : l'étudiant est inscrit dans le filière A. De même pour B et C.

On note F l'événement : l'étudiant est une fille ; G l'événement : l'étudiant est un garçon.

1. Calculez les probabilités des événements A, B et C ; on vérifiera que $p(B) = 0{,}3$.

2. Calculez la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.
Montrez que $p(F) = 0{,}25$.

3. Calculez la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.

4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculez alors la probabilité que ce soit une fille.

► Exercice n°4

Une ville ne dispose que d'un cinéma de quartier dans le centre et d'un cinéma multiplexe en périphérie.

Des films français et des films étrangers sont projetés dans les deux cinémas.

On sait que, parmi les personnes qui vont régulièrement au cinéma dans cette ville :

- 75 % préfèrent le cinéma multiplexe.
- 60 % des personnes qui préfèrent le cinéma de quartier vont voir de préférence les films français.

On choisit au hasard un spectateur parmi les personnes qui vont régulièrement au cinéma dans cette ville.

On note respectivement M, Q, F et E les événements suivants :

M : « le spectateur préfère le cinéma multiplexe » ;

Q : « le spectateur préfère le cinéma de quartier » ;

F : « le spectateur préfère les films français » ;

E : « le spectateur préfère les films étranger ».

Les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondis au centième. On pourra utiliser un arbre de probabilité ou un tableau.

1. Montrer que la probabilité que le spectateur choisi préfère le cinéma de quartier et préfère les films étrangers est 0,1.

2. 70 % des personnes qui vont régulièrement au cinéma dans cette ville préfèrent les films étrangers. Quelle est la probabilité que le spectateur choisi préfère le cinéma multiplexe et préfère les films étrangers ?

3. Le spectateur choisi préfère les films étrangers. Quelle est la probabilité qu'il préfère le cinéma de quartier ?

► Exercice n°5

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.

Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.

Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ». Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

On appellera F_1 l'évènement : « la pomme prélevée provient du premier producteur » ;

F_2 l'évènement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur » ;

F_3 l'évènement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur » ;

C l'évènement : « la pomme prélevée a un bon calibre » ;

$\overline{C}$ l'évènement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} près.

1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.

2. Rassembler les informations données sur un arbre pondéré.

3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,1440.

4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est 0,8465.

5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.