Positions relatives de droites dans l'espace

▶ Exercice n°1

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 3+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 3-u \\ y = -4+2u \\ z = 9-u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Avec le logiciel de calcul formel Xcas, on a résolu le système d'équations suivant :

```
1 resoudre([ -1+2t=3-u, 1-t=-4+2u, 3+4t=9-u ], [t, u])
                    [1, 2 ]
```

a) En admettant que le résultat obtenu est correct, peut-on affirmer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes ? Si oui, en quel point ?

b) Démontrer par le calcul le résultat obtenu par Xcas, et en déduire la position relative de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

▶ Exercice n°2

Soient $A(2;0;3)$ et $B(-1;2;0)$ deux points de l'espace. Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4+2k \\ y = 1-k \\ z = -2+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont-elles parallèles, sécantes, ou non coplanaires ?

▶ Exercice n°3

Dans chacun des cas suivants, étudier la position relative des droites $\mathscr{D}$ et d.

1. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 5+t \\ y = 1-t \\ z = -3+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad d : \begin{cases} x = 3+2t' \\ y = 2+t' \\ z = -6+5t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

2. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad d : \begin{cases} x = 2u \\ y = 5-6u \\ z = 1-2u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$.

3. $\mathscr{D} : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4-t \\ z = 3+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad d : \begin{cases} x = 3-t' \\ y = 1+2t' \\ z = 5+2t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

▶ Exercice n°4

On considère les points $A(1;0;4)$, $B(2;3;0)$, $C(-1;2;0)$, $D(10;2;3)$ et $E(15;5;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan unique.

2. Démontrer que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC).

Positions relatives de droites dans l'espace – correction

▶ Exercice n°1

1. $\mathscr{D}_1$ est dirigée par $\vec{u}(2;-1;4)$ et $\mathscr{D}_2$ par $\vec{v}(-1;2;-1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ pas parallèles.

2. a) Oui car le système formé par les deux représentations paramétriques a une solution. Point d'intersection : $(1;0;7)$ (en remplaçant t par 1 ou u par 2 dans les rep. param.).

b) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes donc coplanaires.

▶ Exercice n°2

• $\mathscr{D}$ dirigée par $\vec{u}(2;-1;1)$; (AB) dirigée par $\overrightarrow{AB}(-3;2;-3)$. Vecteurs pas colinéaires donc droites pas parallèles.

• Rep. param. de (AB) : $\begin{cases} x = 2 - 3u \\ y = 0 + 2u \\ z = 3 - 3u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$.

Système à résoudre : $\begin{cases} 4 + 2k = 2 - 3u \\ 1 - k = 2u \\ -2 + k = 3 - 3u \end{cases}$, solution $k = -7$ et $u = 4$.

$\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes en $(-10;8;-9)$ donc coplanaires.

▶ Exercice n°3

1. Droites pas parallèles ; système résolu pour $t = -4/3$ et $k = 1/3$ donc intersection en $(11/3;5/3;-13/3)$.

2. Droites confondues car système ayant une infinité de solutions.

3. Système sans solution donc droites non coplanaires.

▶ Exercice n°4

1. $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$ non colinéaires.

2. Résoudre $\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$: on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = -3/2$ donc $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ coplanaires, donc $(DE)//(ABC)$.